工学部のための電磁気学入門

藤崎弘士[*1],

2017 年 11 月 26 日

[*1] 日本医科大学 医学部 物理学教室, fujisaki@nms.ac.jp

目次

概要と基本的事項

本部の特徴と構成について

本ノートは 1 セメスター（14 ～ 15 回）用の電磁気学の講義ノートとして書かれている。対象としては、理工系大学の 1 年生のレベルであり、高校物理との接続を意識している。また力学や初歩的な微分積分の知識は仮定している。電磁気学の基礎方程式であるマクスウェル方程式は偏微分方程式として書かれているので、ベクトル解析の知識をつけてから電磁気学を学ぶほうがよいが、ベクトル解析の講義だけで少なくとも 5 回程度は行う必要があるので、1 セメスターの講義に入れるのは難しい。そこで、ここでは必要に応じてベクトル解析の説明を補うという形式をとっている。（ただし、対称性のよい場合であれば、高校生でも理解できる内容ではある。）

本ノートの電磁気学の進め方は「伝統的」なものである。クーロン力から始めて静電気学の部分をコンデンサの理解で締めくくり、磁場に関しては電流が磁場を作るという立場からビオサバールの法則やアンペールの法則の説明を行う。その後に、ファラデーの電磁誘導の現象から電場と磁場が関連していることを学び、最後にマクスウェルの変位電流の話からマクスウェル方程式につながって終わる。これは高校物理のやり方を踏襲しているとも言える。よって、この講義の進み方が分からなくなった場合は、高校の教科書をまず参照してほしい。ただし、ただの高校物理の焼き直しということはなく、積分や微分（偏微分）を使った、より一般的な形式として講義する。電磁気学では本質的に多次元の微積分を駆使する必要があるので、これは初学

者には難しい。しかし、対称性がよい場合であれば、数学的な煩雑さは激減するので、式がどのようなことを意味するのかという物理的なイメージに力点を置いた。よって、ここでは電磁波の性質（その生成も含む）などの高度な話題は省いた。それらに関してはより本格的な電磁気学の教科書で学んで欲しい。

なぜ電磁気学を学ぶか

なぜ電磁気学を学ぶかということに関しては主に以下の理由がある。

- 理工学部（特に工学部）においては、電磁気学の重要性は論を待たないだろう。現在は電気や磁気によっていろんな製品が動いており、これらがない生活は考えられない。よって、国としても電磁気学を習得した工学者・技術者を育成しなければならず、これが特に日本で高校物理でも電磁気学のかなりの部分を教える理由である。もちろん、理工学部の人間としては教養として学んでおくだけでも十分な意義がある。電流、電圧の意味や（結構奥深い）、電気回路の役割、マクスウェル方程式の形だけでも知っておくことは有益だろう。
- 現在、世の中には 4 つの基本的な力があると考えられているが、そのうち重力と電磁気的な力については高校物理で学ぶ。われわれのスケールだと電磁気的な力、もしくは現象はあまり感じることがない（静電気や放電現象くらいだろう）。これはわれわれのスケールでは電荷の中性が保たれているので、電磁気の力が表に現れてこないからである。そういう意味で電磁気現象というのは力学現象（ボールが落ちるなど）と比べるとイメージしずらい。しかし、例えば、人間の体の中を見てみると、原子分子レベルではタンパク質などの高分子からなっているが、これらには電磁気的な力が強烈に働く。重力はほぼ無視できるので、生体分子は電磁気（特に電気）**のみ**を感じて動いていると言ってよい。よって、電磁気を理解することは、生命の基本的な

運動を考える上でも重要となる。

- ここで扱う電磁気学はイギリス人物理学者 James Clark Maxwell によって完成されたものだが、その形は非常に美しい。初学者は非常に煩雑に感じるかもしれないが、ニュートン方程式と比べても、さまざまな対称性が埋め込まれており、それが偏微分方程式で定量的に表されている。またこの方程式は電場、磁場に関する方程式、すなわち場の理論となっており、この形式は他の場の理論（素粒子や流体力学など）を考える上でも模範となるものである。よって、非常に美しく汎用性のある理論を学べるという意義がある。

参考文献など

このノートは以下を補うものとして書かれている。

- 大学生のための基礎シリーズ 5 物理学入門 II. 電磁気学、狩野覚・市村宗武著、東京化学同人 (2005).

電磁気学を学ぶ上では古典力学は避けて通れないので、もし古典力学の学びが不十分と感じる読者は

- 大学生のための基礎シリーズ 4 物理学入門 I. 力学（第 2 版)、市村宗武著・狩野覚、東京化学同人 (2012).

を参照のこと。

その他の参考文献としては以下を挙げておこう。どれもこのノートよりは程度は高く、扱っている内容も豊富である。

- よくわかる電磁気学、前野昌弘著、東京図書 (2010).
- ファインマン物理 III. 電磁気学、ファインマン、レイトン、サンズ著、岩波書店 (1969).
- 理論電磁気学（第 2 版)、砂川重信、紀伊国屋書店 (1973).

第 1 章

クーロン力

1.1 電荷とクーロン力

紙のつつみに入ったストローを引き裂くとき、紙がストローにくっついてしまうことがあるが、これは正負の異なる電気がストローと紙に生じてしまう現象である。また、冬に金属を触るとバチバチとして痛みを感じるが、これも金属から電気が漏れ出す現象であり、この電気量が非常に大きくなったものが雷などの放電現象である。

さて、このような現象から電気の正体を知るまでは長い歴史があるが、結果から言うと、電気は**電荷 (charge)** と呼ばれるものができており、それを細かく分けると、大部分は素粒子の一つである**電子 (electron)** からできている。この電子は歴史的な事情から負の電荷をもっていると考えられており、その量は

$$e = -1.6 \times 10^{-19} \quad [\mathrm{C}] \tag{1.1.1}$$

となっている。これが電荷の基本となるので、これを電荷素量と呼ぶ。この値は歴史的にはミリカンの実験により初めて得られた。電荷の単位は**クーロン (Coulomb)**[C] という。電子はもっとも軽い素粒子であるので、簡単に移動することができ、電子が移ったさきの物体は負の電気をもつ。これを

負に帯電するという。また電子が抜けた物体のほうは逆に正に帯電する。すると、これらの物体の間には引力が働く。これを**クーロン力 (Coulomb's force)** といい、以下の法則が知られている。

$$\boldsymbol{F} = k_0 \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{1.1.2}$$

ここで図*にあるように、物体 1,2 が距離 r だけ離れており、それぞれの電荷量を q_1, q_2 とした。いま説明しているように q_1 と q_2 の電荷の符号が異なるときはこれは引力になるが、同じ符号のときには斥力（反発力）になる。またここで入ってくる定数 k_0 を**クーロンの定数**と呼ぶ。

またこの力はベクトルであり、さらに重要なことに、**重ね合わせの法則**が成り立つと仮定する。つまり、図∗のように 3 つの電荷 q, q_1, q_2 があって、固定されているとすると、注目する電荷 q（これを試験電荷という）にかかる力は

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = k_0 \frac{q q_1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1|^2} \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1|} + k_0 \frac{q q_2}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_2|^2} \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_2|} \tag{1.1.3}$$

となる。よって、試験電荷の周りに N 個の電荷がある場合は

$$\boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{N} k_0 \frac{q q_i}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i|^2} \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i|} \tag{1.1.4}$$

となる。この式は例えば、タンパク質内のあるアミノ酸に働く力を計算するときに重要になる（図*)。

また正の電荷をもっている素粒子としては**陽子 (proton)** があり、これは電子とちょうど同じだけの電荷量をもっている。大部分の物質は陽子と電子が同量だけあり、電気的に中性になっている。例えば、もっとも簡単な原子である水素原子は 1 個の電子と 1 個の陽子からなっている。また溶液中などではナトリウム (Na) やカルシウム (Ca) のイオンが存在し、これらは正に帯電している。これらは電子が抜けることで、陽子分の正電荷が過剰に存在している状態である。

問い

力学で学んだ万有引力は以下のような形をしている。

$$\boldsymbol{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{1.1.5}$$

ここで水素原子の電子と陽子の間に働くクーロン力と万有引力の大きさとその比を求めてみよ。

問い

一人の人間の持つ電子数の 100 万分の 1 を別の人間に移し、二人が 1 m だけ離れているときのクーロン力を概算せよ。ただし、人間の内部にある電子の総数は 2×10^{28} 個とせよ。

1.2　電荷が連続的に分布する場合

上で述べたように、電荷は電子や陽子からなっているので、その値は電荷素量 e の整数倍になっている。つまり、$q = ne$ (n は整数) である。ただし、マクロな物体が帯電しているときは、電荷量が大きい、つまり $n \gg 1$ なので、電荷が連続的に分布していると考えることができる。これは数学的な理想化もしくは近似である。

図∗のような物体に電荷が分布しているとして、この近くに試験電荷 q を置いたときにどのような力が働くかを考えよう。物理の常套手段として、物体を細かく区切って考える。そして、電荷密度を

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \lim_{\Delta v_i \to 0}\frac{\Delta q_i}{\Delta v_i} \tag{1.2.1}$$

で定義する。すると、Δv_i の体積の中には Δq_i の電荷があると考えているので、式 (1.1.4) から試験電荷に働く力は

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \sum_{i=1}^{N} k_0 \frac{q\Delta q_i}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i|^2}\frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i|} \tag{1.2.2}$$

となる。これを連続的な電荷密度を使って表すと、

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \int dv' k_0 \frac{q\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2} \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{1.2.3}$$

となる。これは大学レベルの重要な公式である。

具体例として、有限の線分に電荷が線密度 λ で一様に分布しているときの力を計算してみよう。まず簡単のために 2 次元で考え、この線分の真ん中から r だけ離れた所での力を計算してみる。すると、対称性から力の x 成分は 0 になり、y 成分だけが残る。物理の常套手段で、微小な線分からの力を考えて、それを dF と置く。微小な電荷部分からの力の大きさは

$$k_0 \frac{q\lambda dx}{R^2} \tag{1.2.4}$$

であり、その y 成分はこれに $\cos\theta = r/R$ をかけたものなので、dF は

$$dF = k_0 \frac{q\lambda r dx}{R^3} \tag{1.2.5}$$

となる（図∗を参照)。これを x に関して $-L/2$ から $L/2$ まで積分すれば正味の力が求まり、

$$F = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{k_0 q\lambda r dx}{(x^2+r^2)^{3/2}} = \frac{k_0 q\lambda}{r}(\sin\theta_1 - \sin\theta_2) \tag{1.2.6}$$

となる。ここで $\theta_1 = -\theta_2 = \sin^{-1}(L/2R)$ である。

問い

式 (1.2.6) を導け。ヒント；$x = r\tan\theta$ とおいて x から θ に変数変換してみよ。

問い

図∗のように xy 平面上に半径 r の薄い円板を置き、そこに面密度 σ で電荷を一様に置いたときに、$(0,0,d)$ に置いてある電荷 Q に働く力を求めよ。

第 2 章

電場（電界）

2.1 電場の便宜的な定義

クーロン力は経験的に見つかったものだが、それは万有引力と同じで**遠距離力**の形をしている。つまり、距離 r がどんなに大きくても、2 点間に力が**瞬時に**伝わると考えている。一方、物体を押したりしたときの力は（大雑把に言うと）近くで働くので、これは**近距離力**である。例えば、金属の棒を押すことを考えると、これはまず近距離力で歪み、その歪みが時間をかけて別の地点まで伝わっていく。つまり、瞬時に力の影響が遠方まで及ぶことはない。

後で分かるように、クーロン力のような電気的な力も瞬時に伝わることはなく、**光速度**という有限の（ただし人間のスケールからは非常に速い）速さで伝わる。そこで、そのような性質を表すのに都合のよい**電場 (electric field)** を導入しよう[*1]。これは電気の力を媒介する「場」であり、正確にはすぐ後で出てくるようにガウスの法則（マクスウェル方程式の一つ）解として理解される。しかし、まず最初に電荷がすべて止まっている場合を考える（電流はない）。また磁石なども近くに置かないことにする。このとき $\boldsymbol{r}$ の

[*1] 高校物理、または工学部では電場を電界と呼ぶことも多い。ただし、このノートでは電場で統一する。

位置に試験電荷 q をもってきて、その力を測定したときに、q の周りの電場（静電場）は以下で定義される。

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})}{q} \tag{2.1.1}$$

よって、電荷が連続的に分布しているときは、前章の式 (1.2.3) から、

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \int dv' k_0 \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2} \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{2.1.2}$$

となる。よって、これまで計算したクーロン力から試験電荷 q を除けば電場が求まることになる。ただし、これはここまでの便宜的な定義であり、間違ってはいないが、本質的な定義ではない。電場の本質的な定義は次のガウスの法則で与えられる。

2.2 ガウスの法則（定理）

まずガウスの法則を書き下すと以下のようになる。

$$\int_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} = 4\pi k_0 Q \tag{2.2.1}$$

これは大学レベルの式であり、理解するのはやや難しい。ただし、対称性がよい場合は計算は非常に簡単になる。まずは計算の前に一般的に式を説明することから始めよう。

この式の左辺は**面積分 (surface integral)** と呼ばれるものであり、2 次元の曲面上での関数の積分を表す。これは 2 次元の平面での**重積分**とよく似ている。しかし、曲面は一般的に曲がっているので、定義がやや面倒である。まず、面の中で矩形の微小な面積を考える。それを記述するために面に接する（平行でない）2 つのベクトルを $\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v$ とする。ここで $\boldsymbol{r}$ は面上のベクトルであり、2 つのパラメータ u, v で指定されるものとする。つまり、本当は $\boldsymbol{r}(u,v)$ と書くべきものだが、式が煩雑になるので (u,v) を省いている。このとき、$\boldsymbol{r}_u = \partial\boldsymbol{r}/\partial u, \boldsymbol{r}_v = \partial\boldsymbol{r}/\partial v$ と定義される。

問い

$\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v$ が面に接するベクトルであることを示せ。

これらのベクトルを使って、$(\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v)dudv$ という微小な面積ベクトルを定義する。これが $d\boldsymbol{S}$ である。これを面 S を表すパラメータ空間で積分すると、ガウスの法則の左辺になる。つまり、これらのベクトルを使って書くと、

$$\int_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} = \int du \int dv \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot (\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v) \tag{2.2.2}$$

となる。ガウスの法則の右辺は簡単で、k_0 はクーロンの定数、Q は面 S に囲まれる電荷の総量である。

ここでは簡単な例で使い方を覚えよう。まず簡単で対称性が良い場合、すなわち半径 R の球内に電荷が一様に分布している場合を考えよう。その電荷密度は ρ とする。この原点から r の位置での電場を求めたいとする。まずは半径 r の球面を考えよう。対称性から電場は極座標で考えて r 成分 E_r しか持たないはずである。また、面を回転させても電場は変わらないはずだから、E_r を考える位置の極座標を (r, θ, φ) としたときに、(θ, φ) の依存性はもたない。つまり、$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = E_r(r)\boldsymbol{e}_r$ となる。ここで 3 次元極座標表示の位置は

$$\boldsymbol{e}_r = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta) \tag{2.2.3}$$

であり、θ, φ は 3 次元極座標における角度である（図＊）。また、球面を表す 2 つのベクトルとして、

$$\boldsymbol{r}_\theta = r(\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta) \tag{2.2.4}$$

$$\boldsymbol{r}_\varphi = r(-\sin\theta\sin\varphi, \sin\theta\cos\varphi, 0) \tag{2.2.5}$$

を取ることができる。

問い

ここで $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r$ であることから上を導け。

よって、微小な面積ベクトルは

$$(\boldsymbol{r}_\theta \times \boldsymbol{r}_\varphi) d\theta d\varphi = (r^2 \sin\theta \boldsymbol{e}_r) d\theta d\varphi \tag{2.2.6}$$

となり（示してみよ）、これと電場との内積をとって積分すると

$$\int_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot (\boldsymbol{r}_\theta \times \boldsymbol{r}_\varphi) d\theta d\varphi = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi E_r(r) r^2 \sin\theta \tag{2.2.7}$$

となる。よって、ガウスの法則の左辺は $E_r(r) 4\pi r^2$ となる。なんのことはない、これは電場の大きさ $E_r(r)$ に球面の面積 $4\pi r^2$ をかけただけである。

ガウスの法則の右辺は r の球面に囲まれる電荷の総量なので、それは $Q = \rho \times \frac{4}{3}\pi R^3$ となる。よって、最終的にガウスの法則は

$$E_r(r) 4\pi r^2 = 4\pi k_0 Q \tag{2.2.8}$$

となる。これから電場は

$$E_r(r) = k_0 \frac{Q}{r^2} \tag{2.2.9}$$

となる。これは中心に点電荷 Q があるときの電場と全く変わらない[*2]。

以上からも予想されるように、対称性のよい系の場合は、ガウスの法則は以下のように簡略化される。微小な面積ベクトルを $d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n} dS$ と分解して書く。ここで $\boldsymbol{n}$ は大きさ 1 のベクトルであり、面積ベクトルの向く方向である。電場と $\boldsymbol{n}$ の内積が閉曲面のどこでも同じと仮定すると、ガウスの法則の左辺は

$$\int_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} \int_S dS = E_n S \tag{2.2.10}$$

となる。ここで S は閉曲面の面積、E_n は電場の $\boldsymbol{n}$ 方向への射影である。よって、ガウスの法則から求める電場の大きさは

$$E_n = \frac{4\pi k_0 Q}{S} \tag{2.2.11}$$

[*2] 実際、この電場は半径 r の球内の微小な体積によって生じる微小な電場を足し合わせることでも出すことができる（難しいがやってみよ）。

となる。これは非常に簡単に見えるが、背後には面積分があり、対称性の悪い場合には使えないことに注意。

問い

図∗のように、無限に長い半径 R の円筒の表面に面密度 σ で一様に電荷が存在しているとする。このとき電場の大きさと向きはどのようになるか、ガウスの法則を使って計算せよ。

問い

図∗のように、半径 R の球に密度 ρ で一様に電荷が存在しているとする。このとき電場の大きさと向きは r の関数としてどのようになるか、ガウスの法則を使って計算せよ。上では $r > R$ の場合のみを考えたことに注意。$r < R$ のときに電場はどのようになるか。

第 3 章

電位（静電ポテンシャル）

3.1 電位とは何か

この章では**電位**について考えよう。これは**静電ポテンシャル (electrostatic potential)** と呼ばれることもある。ポテンシャルということから類推されるように、これは古典力学のポテンシャルエネルギーと似ており、電場の線積分として以下のように定義される。

$$\phi(\boldsymbol{r}) \equiv -\int_C \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}') \cdot d\boldsymbol{r}' \tag{3.1.1}$$

ここで C はある曲線を表し、この式はある点から終点 $\boldsymbol{r}$ までの線に沿った線積分を意味する。

ちなみに力学での位置（ポテンシャル）エネルギーは（力学の教科書参照）

$$V(\boldsymbol{r}) \equiv -\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}') \cdot d\boldsymbol{r}' \tag{3.1.2}$$

と定義される。ここで $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ は力のベクトルである。よって、電位と位置エネルギーの間の関係は

$$V(\boldsymbol{r}) = q\phi(\boldsymbol{r}) \tag{3.1.3}$$

となる。

なぜ電位を考えるのかということは、位置エネルギーの有用性からも理解できる。エネルギー保存則を使って計算を楽にできるということである。また、もう一つの重要な点は、電位は実際に電圧計を使って測れる量だということである。その単位は**ボルト** [V] である。また、逆に電位が $\boldsymbol{r}$ の関数として分かっているときは、電場を求めることもできる。それは位置エネルギーと力の間の関係性と同じで、以下で与えられる。

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{r}} \tag{3.1.4}$$

問い

位置エネルギーと力の関係

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{r}} \tag{3.1.5}$$

から上の式を導け。

ここで $\partial/\partial \boldsymbol{r}$ は ${}^t(\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ を略した記号であり、∇（ナブラと読む）と書かれるときも多い。つまり、電場は $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\nabla\phi(\boldsymbol{r})$ と書かれることもあることに注意。

3.2 電位の積分表示

前の章で、電荷が連続的に分布しているときの電場の公式 (2.1.2) が与えられた。これを線積分すると、電位の公式が得られるはずである。結果を書くと

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \int dv' \frac{k_0 \rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \tag{3.2.1}$$

となる。これを導くのはやや難しいが、これを認めて、これから式 (2.1.2) を出すのは簡単である。

問い

式 (3.2.1) を仮定して、式 (2.1.2) を導け。

問い

円板状に一様に電荷が面密度 σ で分布しているときの電位を求めよ。

ただし、対称性のいい場合は、まずガウスの法則で電場を求めてから、それを（不定）積分して電位を求めるというのが早道である。例えば、図∗のように、無限に長い線状に一様に電荷が線密度 λ で分布している場合は、まずガウスの法則から電場は

$$E(r) = \frac{2k_0\lambda}{r} \tag{3.2.2}$$

となる。これを r 方向に積分することで、電位は

$$\phi(r) = -2k_0\lambda \log r + C \tag{3.2.3}$$

となる。ここで C は積分定数である。

3.3 電位の境界条件

電位を求めるときの積分定数は、(1) どこを電位の基準にするか、ということと (2) 電位がなだらかにつながるようにということから決められる。以下の問題を見よ。

問い

電位がなだらかにつながらないときはどういうことが起こるか？

また電場が 1 次元の関数として表されている場合は、それを図に描いてみて、その面積として電位を定義してもよい。（その場合は電位の連続性は自然に保たれる。）

3.4 電気双極子の電位と電場

第 4 章

導体（金属）

4.1 導体の電場と電位

電磁気学において**導体** **(conductor)** というのは電荷をもった物質のある種の理想化である。基本的には**金属** **(metal)** を想定しており、後で述べるようにその導体内で電気を流すことができる。電気を流す性質で物質を分類すると、導体、**半導体** **(semiconductor)**、**絶縁体** **(insulator)** があり、後者になるほど電気を流しにくい。

さて導体の重要な性質は次の 3 点である。ただし、ここでは電流が流れるような状況は考えておらず、静的な状態であることに注意。

- 導体内部には電場は存在しない。
- 電荷は導体の表面にしか存在しない。
- 外部から電場をかけると表面に電荷が誘起される（静電誘導）。

この理由付けに関しては、教科書∗などを参照。しかし、ここでは、これを導体の定義と考えてもいいだろう。

さて、半径 R の球の導体の表面に電荷 Q があるときはどのような電場や電位が生じているか。これはガウスの法則から簡単に求めることができる。

電場については以下である。

$$E(r) = \frac{k_0 Q}{r^2} \quad (r > R) \tag{4.1.1}$$

$$E(r) = 0 \quad (r < R) \tag{4.1.2}$$

これを積分することで、電位は

$$\phi(r) = \frac{k_0 Q}{r} \quad (r > R) \tag{4.1.3}$$

$$\phi(r) = \frac{k_0 Q}{R} \quad (r < R) \tag{4.1.4}$$

となる。

4.2 静電誘導

導体に外部から電場をかけると、表面に電荷が誘起され、これを**静電誘導 (elestrostatic induction)** と呼ぶ。しかし、まずここで注意したいのは、電荷は何もないところからやってくるわけではなく、導体内での電荷の再分配が起こるということである[*1]。では具体的にどのくらいの量の電荷が誘起されるのか。これを考える際には、図∗のような導体の表面を考え、そこに面密度 σ で電荷がある場合を考える。すると、ガウスの法則から

$$E_n S = 4\pi k_0 \sigma S \tag{4.2.1}$$

となるはずである。ここで、E_n は表面に垂直な電場の成分ということである。よって、

$$\sigma = \frac{1}{4\pi k_0} E_n \equiv \varepsilon_0 E_n \tag{4.2.2}$$

となる。ここで、

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi k_0} \tag{4.2.3}$$

[*1] 自然界の基本法則として、電荷保存則があり、何もないところからプラスだけ、もしくはマイナスだけの電荷が生まれることはない。ただし、ペアになって現れるのならよい。

として、**真空の誘電率** ε_0 というものを定義した。本ノートの以下の章では k_0 でなく、ε_0 がよく使われる。

4.3　一様電場中の導体球に誘起される電荷

　さて、では図＊のように、一様電場中に半径 R の導体球がある場合、導体表面にどのような電荷が誘起されるか考えよう。式 (4.2.2) から表面での電場が分かれば計算できることになる。しかし、この場合、それが一様ではないので難しい。ただし、この場合、電位が

$$\phi(\boldsymbol{r}) = -\left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right) \boldsymbol{E}_0 \cdot \boldsymbol{r} \tag{4.3.1}$$

と書けることが知られている。ここで導体球の中心を原点にとった。よって、これから導体表面上の電場を求めて、式 (4.2.2) を使うと、

$$\sigma(\boldsymbol{r}) = 3\varepsilon_0 \boldsymbol{E}_0 \cdot \boldsymbol{n} \tag{4.3.2}$$

となることが分かる。ここで $\boldsymbol{n}$ は表面上の単位法線ベクトルである。

問い

式 (4.3.2) を導出せよ。ただし、$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}/R$ である。

第 5 章

コンデンサ

5.1 平行板コンデンサ

コンデンサ (condenser, capacitor) とは導体を組み合わせて、電荷を溜める装置のことである。もっとも簡単で基本的なものは平行板コンデンサで図＊のようになっている。ここに電池をつなぐと充電ができ、電荷が溜まる。ではどれくらい溜まるか？

電池は電磁気学では**起電力**をもっているものとして定義される。そこではある電位が生じており、それを ϕ とする。この電池につながれるとコンデンサの内部には電場が生じる。それを E としよう。平行板コンデンサの場合は対称性からこれは一定かつ一様な電場であるとしてよい。

導体の片方（上とする）に σ の面密度の電荷が溜まっているとすると、もう片方（下）には電気的な中性を保つために $-\sigma$ の面密度の電荷が溜まるはずである。上の導体に図＊のようにガウスの法則を適用すると、

$$2\varepsilon_0 ES = \sigma S \tag{5.1.1}$$

となる。よって、電場は下向きに $E = \sigma/(2\varepsilon_0)$ である。しかし、下側の導体からの電場の寄与があるので、それを足すと、内部の全電場は $E = \sigma/\varepsilon_0$ となる。すると、コンデンサ内での電位差は $Ed = \sigma d/\varepsilon$ であり、これが起

電力によってもたらされたと考える。

よって、電荷量 Q は

$$Q = \sigma S = \frac{\varepsilon_0 S}{d}\phi \tag{5.1.2}$$

となる。また電荷の溜めやすさを**静電容量 (capacitance)** として、$C = Q/\phi$ で定義すると、平行板コンデンサの場合は

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \tag{5.1.3}$$

となる。これは高校物理でも登場する基本的なコンデンサの式である。

5.2 平行板コンデンサのエネルギー

またこの平行板コンデンサに電荷 Q が溜まっているときのエネルギー（静電エネルギー）を求めよう。まずコンデンサに電荷 q がすでに溜まっているときを考える。このときの電位差は $\phi = q/C$ となる。そこで、電池からさらに Δq の微小な電荷をコンデンサに移動することを考えると、その際の仕事は $\Delta q\phi = \Delta q\frac{q}{C}$ である。これを電荷が Q になるまで繰り返すと結局以下の積分になる。

$$W = \int_0^Q dq\phi = \int_0^Q dq\frac{q}{C} = \frac{Q^2}{2C} \tag{5.2.1}$$

この仕事がコンデンサーに溜まるエネルギーと考えることができる。（放電するときはこのエネルギーを失うと考える。）

またこのエネルギーを静電容量の式などを使って以下のように書き換える。

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0\frac{S}{d}\right)(Ed)^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2(Sd) \tag{5.2.2}$$

すると、Sd はコンデンサの体積であるので、単位体積当たりのエネルギーは $\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ となる。これを一般化することで、電場のエネルギー密度は

$$u(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 |\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})|^2 \tag{5.2.3}$$

と定義される。これは有用な公式である。

問い

図＊のような球内に一様に電荷が分布しているときの全空間での電場のエネルギーを求めよ。

5.3　円筒形コンデンサ

以上は高校の復習だが、大学レベルとしては図＊のような円筒形コンデンサを考えることができる。このときは内側に電荷 Q が溜まっており、外側に電荷 $-Q$ が溜まっていると考えてまず電位差を計算する。式 (3.2.3) と同様に考えて、面密度が σ だとすると、電位は

$$\phi(r) = -2k_0\sigma\log r + C \tag{5.3.1}$$

なので、電位差は

$$\Delta\phi = \phi(b) - \phi(a) = 2k_0\sigma\log(b/a) \tag{5.3.2}$$

となる。よって、長さが L であれば、静電容量は

$$C = Q/\Delta\phi = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\log(b/a)} \tag{5.3.3}$$

となる。

問い

同様に、図＊のような同心球コンデンサの静電容量を計算してみよ。

5.4　誘電体

絶縁体は電気を流さないが、導体と同じで電場をかけるとその表面に電荷が誘起される。その性質から絶縁体を**誘電体 (dielectric)** と呼ぶこともある。ただし、そのときに生じる電荷は式 (4.2.2) のようにはならない。実際、物質によって電荷の生じる機構は異なり、単純ではないが、図∗のように上の導体から見ると、$-\sigma_P < 0$ という表面電荷が下に誘起される。（下の導体でもそれと逆のことが起こって $+\sigma_P$ の表面電荷が誘起される。）電荷 σ_0 を外から（電池から）もってくると、誘電体がなければ電場は $E_n = \sigma_0/\varepsilon_0$ であるが、誘電体があると $E_n = (\sigma_0 - \sigma_P)/\varepsilon_0$ となる。$\sigma_P > 0$ なので、**誘電体内の電場は一般に弱まる**。よって、

$$\sigma_0 = \varepsilon_0 E_n + \sigma_P \tag{5.4.1}$$

という関係が成り立っているが、σ_P も E_n に比例していると考えて、この右辺を εE_n と書く。このときの ε を物質の誘電率と呼び、真空の誘電率との比 $\varepsilon/\varepsilon_0$ を比誘電率と呼ぶ。比誘電率は一般に 1 以上であり、水の場合であれば 80 程度の値である。これは水中に電荷を置くと、真空中と比べて電場が 1/100 倍ほどに弱くなることを意味している。

問い

タンパク質内の比誘電率はどうなっているか、調べてみよ。

5.5　コンデンサの並列接続・直列接続

コンデンサはその形状や誘電体によっていろんな種類のものを作ることができる。しかし、それをいくつかのパーツに分けて考えることもできる。

例えば図∗のようになっていると、これをコンデンサの並列接続と呼ぶ。このときに、コンデンサ C_1 に Q_1 の電荷が溜まり、コンデンサ C_2 に Q_2

の電荷が溜まっているとすると、トータルでは $Q_1 + Q_2$ の電荷が溜まっていることになる。よって、全体の静電容量は $C = (Q_1 + Q_2)/V$ となる。ただし、それぞれのコンデンサに溜まっている電荷は $Q_1 = C_1 V, Q_2 = C_2 V$ となっているので、

$$C = C_1 + C_2 \tag{5.5.1}$$

となる。これは並列接続の公式である。

図∗のように接続されていると、これをコンデンサの直列接続と呼ぶ。このときは Q の電荷が溜まると、すべてのコンデンサに同じ電荷が誘起されると考える。このとき全体の電位差（電圧）は $V = V_1 + V_2$ であり、全体の静電容量を C とすると、$V = Q/C, V_1 = Q/C_1, V_2 = Q/C_2$ が成り立つので、

$$C^{-1} = C_1^{-1} + C_2^{-1} \tag{5.5.2}$$

という式が得られる。これは直列接続の公式である。

問い

図∗のようなときの静電容量を求めよ。

第 6 章

電流

6.1 電流とは何か

電流 (electric current) とはその名の通り電気の流れである。流れということは時間的に変動しているので、これまでの**静電気** (electrostatic) の話とはまず違うことに注意。静電気学は電流はもちろんのこと、電荷の移動が起こらなくなって定常状態になったときの話である。これは近似、もしくは理想化である。

電流は電気の流れであるが、このノートを含め、電磁気学の教科書で扱う電流の大部分は**電子の流れ**である。また歴史的な理由から、電子が流れる方向とは逆に電流が流れると考える。つまり、正の電荷が流れていれば、それの方向が電流の方向になる。電子以外には、溶液中や生体内で、陽イオンや陰イオンの流れを考えることもあり、これは生理学などを考える上でも重要である。ただし、このノートでは金属導体中を流れる「粒」としての電子を考えればよい[*1]。

[*1] 実際は、電子は量子性をもつので、量子力学を使って考えなければならない。しかし、その結果として、(大部分の状況では) 電子を古典的に扱ってよいことが正当化されるので、ここでは電子を古典的な電荷をもつ「粒」と考え、それの運動はニュートン方程式に従うと考える。

図＊のような円筒形の金属を考え、それに電池をつなげると電流が流れる。それは N 個の電子の流れであり、ここで電子の密度を均一と考えて、定数の $n = N/(Sd)$ とする。電子は電荷をもつので、お互いクーロン力で相互作用しているわけであるが、ここではそれを無視し独立に動いていると考える。また、後で出てくる理由から、電子はすべて同じ一定の速度 $\bar{v}$ で等速直線運動しているとする。すると、電流 I は

$$I = qnS\bar{v} \tag{6.1.1}$$

と定義される。ここで、q は電荷であり、電子であれば $q = -e$ となる。この電流の単位は [C/s] となり、単位時間あたりに流れる電荷の量ということになっている。

6.2 定常電流

前節では、電荷の速度がすべて一定になると仮定したが、これは以下のような考えに基づいている。まず、円筒の導体の中に一定の電場 E があるとすると、一定の力 qE が電荷には働いているので、それは等加速度運動になる（速度は時間とともに増える）。これでは一定の速度にはならない。しかし、導体の中には電荷の運動を妨げるものがあり、それが抵抗もしくは摩擦の効果を生む。これは具体的には原子核の熱運動であり、電子がそれに当たって、速度を変える効果が抵抗となる。これをモデル化するために

$$F = -\gamma m v \tag{6.2.1}$$

という摩擦力が働くと考えよう。これは力学の授業で出てくる、ストークスの摩擦と同じ形である。すると電荷のニュートン方程式は

$$m\frac{dv}{dt} = qE - \gamma m v \tag{6.2.2}$$

となる。

問い

式 (6.2.2) を解け。

長い時間が経った後の速度は $v = \frac{qE}{\gamma m} \equiv \bar{v}$ となる。よって、この摩擦力が働いていると、電荷の速度は最終的に一定値 $\bar{v}$ になってしまうというわけである。すると電流の値は

$$I = \frac{q^2 nS}{\gamma m}E \tag{6.2.3}$$

となる。つまり、一定の電場がかかっているときに一定の電流（定常電流）が流れることになる。

6.3　オームの法則

上の式電圧 $V = Ed$ を使って書き換えると、

$$I = \frac{q^2 n}{\gamma m}\frac{S}{d}V \tag{6.3.1}$$

となり、電流が電圧に比例することになる。これが**オームの法則 (Ohm's law)** であり、その比例計数を $1/R$ とすると、

$$R = \frac{\gamma m}{q^2 n}\frac{d}{S} = \rho\frac{d}{S} \tag{6.3.2}$$

となる。これを導体の**電気抵抗 (electric resistance)** といい、その中の ρ を**比抵抗**という。この比抵抗は物質に固有の部分である。d/S の因子は導体が長いほど、もしくは断面積が小さいほど抵抗が大きくなるという、形状による効果を表している。

さて抵抗 R を使って、電流と電圧の関係を書くと

$$I = \frac{1}{R}V, \quad V = RI \tag{6.3.3}$$

となる。大部分の金属や半導体であればこの式が成り立つ。ただし、このような比例関係が成り立たないものもあり、その例としては電球のフィラメン

トやダイオードがある。ただし、それらについて考えるためには、個別の性質を調べる必要があるので、ここでは取り扱わない。

また比抵抗の温度依存性について少し述べる。金属であれば ρ は温度を上げると大きくなる。これは原子核の熱運動がより大きくなり、抵抗として作用するからである。ただし、半導体の場合は ρ は温度を上げると小さくなる。これは電気を伝える電荷（この場合は電子とホールと呼ばれる正の電荷をもったもの）の数が温度とともに増えるからである。

6.4 ジュール熱

さて、導体に電流を流し続けていると、その導体は熱くなる。これは発熱しているということであり、それを**ジュール熱 (Joule's heat)** と言う。これは電気抵抗が生じる場所で電子の運動エネルギーが熱に変わってしまうために起こる。これは式 (6.2.2) から理解できる。

式 (6.2.2) から、電荷のもつ全エネルギー

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - qEx \tag{6.4.1}$$

の時間変化は

$$\frac{dE}{dt} = -P, \tag{6.4.2}$$

$$P = VI = RI^2 = \frac{V^2}{R} \tag{6.4.3}$$

となる。ここで P は発熱の量であり、電圧と電流の積になる。またオームの法則を考えると、抵抗を含むような式に変えることもできる。

問い

式 (6.4.1) と式 (6.4.2) を導け。また、$P = V^2/R$ と書くと、R が大きいほど消費電力は小さいことになる。これを解釈せよ。

6.5　キルヒホッフの法則

キルヒホッフの法則は一般的な回路に成り立つ法則だが、もっとも簡単な回路として、以下の直列回路と並列回路を考えよう（図＊）。

ここで重要な概念として、**電圧降下**について説明する。これは電流 I が抵抗 R を流れると、RI の分の電圧が下がるという現象であり、実際電圧計などで確かめることができる。すると、図＊のような 2 つの抵抗 R_1, R_2 をつないだ直列回路では、それぞれ $R_1 I, R_2 I$ という電圧降下が起こる。これが起電力 V と釣り合うので、

$$V = R_1 I + R_2 I \tag{6.5.1}$$

という関係が成り立つ。ここで**合成抵抗**というものを導入する。それは図＊にあるように、直列回路を一つの抵抗 R の回路に置き換えるものである（これを等価回路とも呼ぶ）。すると、そのときは $V = RI$ という関係が成り立っているので、$V = RI = R_1 I + R_2 I$ より、

$$R = R_1 + R_2 \tag{6.5.2}$$

という関係が成り立つ。これが直列回路の公式である。

図＊のような並列回路のときは、電流 I が I_1, I_2 と分岐すると考える。電荷の保存則から

$$I = I_1 + I_2 \tag{6.5.3}$$

が成り立つ。このときのそれぞれの回路の電圧降下は $R_1 I_1, R_2 I_2$ であるが、これは起電力 V に等しいはずであるから、$V = R_1 I_1 = R_2 I_2$ が成り立つ。これを上の式に入れると、

$$I = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} \tag{6.5.4}$$

となる。ここで並列回路の等価回路を考えると、$I = V/R$ が成り立っているので、

$$R^{-1} = R_1^{-1} + R_2^{-1} \tag{6.5.5}$$

となる。これが並列回路の公式である。

キルヒホッフの法則は以上のことを一般化な回路にも適用したものである。

(a) 回路において電流が分岐するときはそれらは保存する。(b) 任意の閉回路において、正味の電圧降下はゼロになる。

と表現される。これは複雑な回路に流れる電流などを調べるときに用いられる。

第 7 章

磁場とローレンツ力

7.1 磁場とは何か

磁場は古くは磁石の及ぼす力として知られていたものであり、電場と同じように遠距離力として働くように人間には感じられる。しかし、電場（電気）との重要な違いは、磁石には N 極、S 極というものが常にペアで現れるという点である。電荷であれば、正と負を別々に取り出せる。ただ電荷と似ているのは N 極同士、S 極同士は反発し、N 極と S 極は引き合う力が働くことである。そういう意味では磁石は前に出てきた、電気双極子によく似ていると言える。

また歴史的には電池を使って定常電流を流せるようになったときに、その近くに軽い磁石を置くと、それが影響されることが発見された (1820 年、エルステッド)。同時期に電流同士の間にも力が働くことが発見された（アンペール）。これらの現象をまとめて整理することから、電流からも磁石と同じ磁場が発生していることが結論された。それは電場と同じでベクトル場であり、位置（と時間）の関数になっている。それをまとめて $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = {}^t(B_x(x,y,z), B_y(x,y,z), B_z(x,y,z))$ と書こう。高校物理ではこれを磁束密度と呼ぶこともあるが（なぜ密度という表現が出るかは後で分かる）、このノートでは一貫して磁場と呼ぶ。

7.2 ローレンツ力

さて、磁場中に電荷 q を置くと、その電荷が速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ で動いているときに力が生じることが知られている。それを（狭義の）**ローレンツ力 (Lorentz force)** と呼ぶ。この力は経験的に以下のように書ける。

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \tag{7.2.1}$$

一般的には電場も生じている状況で考えるので、ローレンツ力は電場による力と磁場による力を加えて、

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \tag{7.2.2}$$

となる。

ここで掛け算の記号はベクトルの外積であり、一般の 3 次元のベクトル $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ に対して以下で定義される。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} &= \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_y B_z - A_z B_y \\ A_z B_x - A_x B_z \\ A_y B_z - A_z B_y \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{7.2.3}$$

これを実際に計算するには、たすき掛けの考えを用いればよい。つまり、ベクトルに 2 行付け足して

$$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \\ A_x \\ A_y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \\ B_x \\ B_y \end{pmatrix} \tag{7.2.4}$$

として、最初の一行を消して、残りの行でたすき掛けをやっていけば所望の結果になる。

7.2.1 一定の磁場中の運動

ここで一定の磁場中の電荷の運動について考えよう。つまり、磁場の各成分は定数とする。すると、磁場の向きを z として、一般性を失うことなく、以下のように書ける。

$$\boldsymbol{B} = {}^t(0, 0, B) \tag{7.2.5}$$

これをニュートン方程式の右辺に入れると、

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \tag{7.2.6}$$

となるので、これを各成分で書くと

$$m\frac{dv_x}{dt} = qBv_y, \tag{7.2.7}$$

$$m\frac{dv_y}{dt} = -qBv_x, \tag{7.2.8}$$

$$m\frac{dv_z}{dt} = 0 \tag{7.2.9}$$

となる。

問い

上のニュートン方程式を解いて、荷電粒子は z 方向には一定の速度で動き、xy 平面では円運動することを示せ。円運動の周期は $\omega_c = qB/m$ であることも示せ。これはサイクロトロン振動数と呼ばれる。

7.2.2 ホール効果

図*のような状況を考える。これは実際のデバイスとして存在し、ホール素子と呼ばれる。この状況を記述する方程式は、電子に電磁場と摩擦が働いている場合になり、以下の式になる。

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = q\boldsymbol{E} + q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} - \gamma m\boldsymbol{v} \tag{7.2.10}$$

ただし、素子が小さいと考えて、電磁場の空間依存性を無視した。この素子の定常状態を考えると、時間変化はなくなっているので、右辺をすべて 0 と置くことができる。また、この素子では y 方向には電流が流れないので（そのように設計できる）、$v_y = 0$ となる。そのような状況で x 方向の定常電流 I_x を計算し、また y 方向の電場 E_y を計算して（電流がなくても電場や電位は存在する）、

$$R_H = \frac{E_y}{j_x B} \tag{7.2.11}$$

という量（これをホール係数と呼ぶ）を計算すると、$1/qn$ になる。ただし、$j_x = I_x/S$ であり、S は x 方向の素子の断面積である。ホール係数は素子の形状や抵抗などに全くよらない量になり、これから素子を流れる電荷や電荷密度を測ることができる[*1]。

問い

ホール係数 R_H が上の状況で

$$R_H = \frac{1}{qn} \tag{7.2.12}$$

となることを示せ。

[*1] 金属であれば $q = -e$ となるが、半導体などを使うと、q が正の値になることもある。これはホールと呼ばれる、電子が抜けた跡が動いていると考えることができる。詳しくは半導体の参考書を参照。

第 8 章

ビオ・サバールの法則

8.1 磁場の簡単な公式

前の章で、磁石や電流から磁場が生じるということを述べた。磁石は工学的にも非常に重要なものであるが、本章（このノート）では主に電流による磁場生成についてしか説明しない。磁石による磁場は磁石の形状などを考えると煩雑になり、説明が難しくなるということと、円電流によって棒磁石の磁場であれば表すことができるので、まず磁場生成の基本的なメカニズムは知るためには、電流によって生じる磁場を学ぶことが重要である。

高校物理では、電流による磁場として、以下の 3 つの場合を考えた。

- 直線電流：図∗のように無限に長い直線の導線に電流 I が流れているときの磁場は

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \tag{8.1.1}$$

  で与えらえる。ただし、その向きは導線を**右ねじの法則**で取り囲むような向きである。
- 円電流：図∗のように半径 a の円電流 I が流れているときに、円の中

心に生じる磁場は

$$B = \frac{\mu_0 I}{2a} \tag{8.1.2}$$

となる。

- ソレノイド：これは円電流を積み重ねたものと考えることができるが、単位長さあたりのコイルの巻き数を n とすると、ソレノイドの中心軸上での磁場の強さは

$$B = \mu_0 n I \tag{8.1.3}$$

となる。

ここで μ_0 は**真空の透磁率**と呼ばれる量であり、電気のときの ε_0 に対応している。

以上の式は有用であり、かつ簡潔な式であるが、高校物理ではこれがどのように導かれるのかに関する議論はなかった。それを与えるのが以下の**ビオサバールの法則（公式）**である。

8.2　ビオサバールの法則

ビオサバールは一般の電流場 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ に対して磁場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ を与える式を提唱した。それがビオサバールの法則（もしくは公式）である。

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \int_V dv' \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}') \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} \tag{8.2.1}$$

若干複雑であるが、これは実は連続的な電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r})$ に対する電場の式 (2.1.2) と非常によく似ていることが分かる。違うところは $\rho(\boldsymbol{r})$ を $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ に置き換えたときに、ベクトルの外積が入るということと、係数が $k_0 = 1/4\pi\varepsilon_0$ から $\mu_0/4\pi$ に変わったということだけである。

またこの式は電流が空間的に分布して流れるときの式であるが、実際は導線の中を定常電流 I が流れていることが多いので、その場合は

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) dv' = I d\boldsymbol{r}' \tag{8.2.2}$$

という関係を使って、

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \int_C \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\boldsymbol{r}' \times (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} \tag{8.2.3}$$

と書き換えることができる。こうすることで、磁場を求める計算は、体積 V での積分 (3 次元) でなく、電流に沿った線分 C での線積分 (1 次元) となる。

8.2.1　直線電流による磁場

ビオサバールの法則を使って直線電流による磁場について考えよう。この場合、磁場を観測する場所を $\boldsymbol{r} = {}^t(x,y,0)$ とし、z 軸方向に定常電流 I が流れているとして、$\boldsymbol{r}' = {}^t(0,0,z),\quad d\boldsymbol{r}' = {}^t(0,0,dz)$ とする。すると、$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ であり、$d\boldsymbol{r}' \times (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = {}^t(-ydz, xdz, 0)$ であるから、微小な電流要素 $Id\boldsymbol{r}'$ によってできる磁場 $d\boldsymbol{B}$ は

$$d\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} -ydz \\ xdz \\ 0 \end{pmatrix} \tag{8.2.4}$$

となる。ここで 2 次元の極座標を使って $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ と書くと、全体の磁場は、z 方向に積分することから、

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\boldsymbol{e}_\theta \int_{z_1}^{z_2} dz \frac{r}{(r^2+z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}(\sin\theta_1 - \sin\theta_2)\boldsymbol{e}_\theta \tag{8.2.5}$$

となる。ここで θ_1, θ_2 は観測点 $\boldsymbol{r}$ と電流の流れている端との間のなす角であり、$\theta_1 = \tan^{-1}(z_1/r), \theta_2 = \tan^{-1}(z_2/r)$ である。また $\boldsymbol{e}_\theta = {}^t(-\sin\theta, \cos\theta, 0)$ は角度方向の単位ベクトルである。直線が無限に長い場合は $\theta_1 = \pi/2, \theta_2 = -\pi/2$ となるので、磁場は

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\boldsymbol{e}_\theta \tag{8.2.6}$$

となる。これは高校物理の結果と一致する。

問い

図∗のような半径 a の円電流が流れているとき、z 軸上での磁場を求めよ。ただし、観測点 $\boldsymbol{r} = {}^t(0, 0, z)$, 電流の線分 $\boldsymbol{r}' = {}^t(a\cos\theta, a\sin\theta, 0)$, 微小線分は $d\boldsymbol{r}' = {}^t(-a\sin\theta, a\cos\theta, 0)d\theta$ である。

問い

図∗のような半径 a の円電流が流れているとき、$\boldsymbol{r}$ での磁場を求めよ。一般的に求めることは煩雑になるので、a が $\boldsymbol{r}$ の大きさより非常に小さいときに

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r} - r^2\boldsymbol{m}}{r^5} \tag{8.2.7}$$

となることを示せ。これを磁気双極子による磁場といい、$\boldsymbol{m} = \mu_0 I\pi a^2\boldsymbol{e}_z$ を磁気双極子モーメントと呼ぶ。

第 9 章

アンペールの法則

9.1 アンペールの法則とは

前章でビオサバールの法則について学んだ。これは電流分布もしくは定常電流で導線分布が与えられているときに磁場の空間分布を与える式であった。これは電荷が分布しているときに電場の分布を与える式と非常によく似ている。では、電場の場合はガウスの法則というものがあったが、これに対応するものは磁場の場合はどうなるのか？　それがアンペールの法則であり、以下のように書ける。

$$\oint_C \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = \mu_0 I \tag{9.1.1}$$

ここで左辺はある閉曲線 C に対する線積分である。これを周回積分とも呼ぶ。右辺の I は定常電流の値であるが、これは面積分を使って、

$$I = \int_S \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} \tag{9.1.2}$$

と定義される。ここで S は C によって囲まれる閉曲面である（曲がっていてもよい）。

対称性のよい場合はこの式を使って磁場を求めることができる。例えば、無限に長い直線電流の周りの磁場について考えよう。この答えは既に式

(8.2.6) で与えられているが、その際にはやや煩雑な積分計算が必要であった。これをアンペールの法則を使って求めると、右ねじの法則から磁場は電流を囲むように発生しているはずであり、電流から距離 r だけ離れた円周を考えると、磁場の向きはその円周に沿っている。よって、線積分は $B(r)2\pi r$ となり、これが $\mu_0 I$ と等しいのだから、$B(r) = \mu_0 I/(2\pi r)$ となる。これはビオサバールの法則から求めたものと同じである。他にもいくつか対称性のよい場合があるが、一般にはアンペールの法則はそれを使って磁場が計算できるというものではなく、磁場が満たすべき方程式と考えるべきだろう。

問い

図＊のような半径 a の円筒中を定常電流 I が流れているときに発生する磁場をアンペールの法則を使って求めよ。

問い

図＊のようなソレノイドの内部に生じる磁場をアンペールの法則を使って求めよ。

問い

図＊のような半径 a の円電流が流れているときに、図＊のような経路に沿って磁場の線積分を計算せよ。その際はビオサバールの法則で求めた、円電流の軸上の磁場の式を使え。

9.2　アンペールの法則の微分形

さてアンベールの法則には別の表し方がある。それを示すためには、以下の**ストークスの定理**について説明しなければならない。これはあるベクトル量の線積分を面積分として表すというものであり、以下のように書かれる。

$$\oint_C \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = \int_S \mathrm{rot}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} \tag{9.2.1}$$

この数学的な証明に関しては＊などを当たってほしいが、直感的でややいい加減な説明をしてみよう。図＊のように、z 軸に垂直な平面において、微小な四角形の領域（その大きさは $\Delta x \Delta y$）を考える。そこで、ベクトル $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ の周回積分をしてみよう。その際、$\boldsymbol{r} = (x, y) \to (x+\Delta x, y) \to (x+\Delta x, y+\Delta y)$ という経路 C_1 と $\boldsymbol{r} = (x, y) \to (x, y + \Delta y) \to (x + \Delta x, y + \Delta y)$ という経路 C_2 を考えて線積分し、それらの値を I_1, I_2 とする。それらは以下のように計算される。

$$I_1 = B_x(x, y)\Delta x + B_y(x + \Delta x, y)\Delta y \tag{9.2.2}$$
$$I_2 = B_y(x, y)\Delta y + B_x(x, y + \Delta y)\Delta x \tag{9.2.3}$$

すると、周回積分は $I_1 - I_2$ となるので、

$$\begin{aligned}\oint_C \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} &\simeq B_x(x, y)\Delta x + B_y(x + \Delta x, y)\Delta y \\ &\quad - (B_y(x, y)\Delta y + B_x(x, y + \Delta y)\Delta x) \\ &\simeq \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right)\Delta x \Delta y \end{aligned} \tag{9.2.4}$$

となるが、この最右辺の括弧の中を $\mathrm{rot}\boldsymbol{B}$ の z 成分と定義する。ここで、$\mathrm{rot}\boldsymbol{B}$ を定義しておくと、

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\boldsymbol{B} &\equiv \nabla \times \boldsymbol{B} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{9.2.5}$$

となる。すると、式 (9.2.4) において、$\Delta x \Delta y = dS_z$ とみなすことができるので、

$$\oint_C \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} \simeq (\mathrm{rot}\boldsymbol{B})_z dS_z \tag{9.2.6}$$

ということになり、これを任意の閉曲線に一般化したものがストークスの定理と考えることができる。

さて、ストークスの定理と電流密度の式 (9.1.2) を使うことで、アンペールの法則を面積分を使って表すことができる。それは

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \mu_0 \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \tag{9.2.7}$$

となる。これがアンペールの法則の微分による表現であり、マクスウェルの方程式の一つである。ただし、これは電場や磁場が時間的に変動しない（定常電流は流れていてよい）場合の結果であり、もっと一般的な場合は後で示される。実際は右辺を変更しなければならず、これはマクスウェルによって示された。

問い

磁場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ から以下の式によってベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ というものを定義できる。

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \equiv \mathrm{rot}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \tag{9.2.8}$$

ビオサバールの法則を使うと、このベクトルポテンシャルは

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \int_V dv' \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \tag{9.2.9}$$

と表されることを示せ。

第 10 章

ファラデーの電磁誘導の法則

10.1 自己誘導

10.2 相互誘導

第 11 章

交流の電気回路

第 12 章

変位電流からマクスウェル方程式へ

参考文献

[1] R.P. ファインマン・R.B. レイトン・M.L. サンズ著、坪井忠二訳、『ファインマン物理学：力学』、岩波書店 (1967).

[2] 赤野松太郎ら著、『医歯系の物理学』、東京教学社 (1987).

[3] A.P. フレンチ著、橘高知義監訳、『MIT 物理：力学』、培風館 (1983).

[4] V.D. バーガー・M.G. オルソン著、戸田盛和・田上由紀子訳、『力学 –新しい視点にたって–』、培風館 (1975).

[5] 田崎晴明、やっかいな放射線と向き合って暮らしていくための基礎知識、朝日出版社 (2012): `http://www.gakushuin.ac.jp/~881791/radbookbasic/`

[6] 長谷川修司、振動・波動、講談社 (2009).

[7] 小形正男、振動・波動、裳華房 (1999).

[8] 吉岡大二郎、振動と波動、東京大学出版会 (2005).

[9] H. Fujisaki, Y. Zhang, and J.E. Straub, Non-Markovian theory of vibrational energy relaxation and its application to biomolecular systems, Adv. Chem. Phys. **145**, 1 (2011).

[10] Y. Matsunaga, H. Fujisaki, T. Terada, T. Furuta, K. Moritsugu, and A. Kidera, Minimum Free Energy Path of Ligand-Induced Transition in Adenylate Kinase, PLoS Comput. Biol. **8**, e1002555 (2012).

[11] *Normal Mode Analysis: Theory and Applications to Biological and Chemical Systems*, edited by Q. Cui and I. Bahar, Chapman and

Hall/CRC Press, Boca Raton, Florida (2005).

[12] Rob Phillips, Jane Kondev, Julie Theriot, *Physical Biology of the Cell*, (Garland Science, 2009).

[13] Shin-ichi Sasa, Hydrodynamics from Hamiltonian particle systems, arXiv:1306.4880.

[14] 吉武 康栄, 生体信号処理のレシピ, 大分看護科学研究 4(1), 27 - 32 (2003).

[15] 小野寺 光永, 井須 芳美, 長嶋 雲兵, 吉田 裕亮, 細矢 治夫, 永川 祐三, フーリエ変換とベイズモデルおよびトレンドモデルによる時系列データのノイズ除去, Journal of Chemical Software, Vol. 5 (1999), No. 3, p.113-128.

[16] H. Kikuchi, H. Fujisaki, T. Furuta, K. Okamoto, S. Leimukuehler, and T. Nishino, Different inhibitory potency of febuxostat towards mammalian and bacterial xanthine oxidoreductases: insight from molecular dynamics, Scientific Reports, **2**, 331 (2012).

[17] シルヴィア・アローヨ・カメホ、シルヴィアの量子力学、岩波書店 (2009).

[18] サイモン・シン、暗号解読（上・下）、新潮文庫 (2007).

[19] 筒井泉、量子力学の反常識と素粒子の自由意志、岩波科学ライブラリー (2011).

[20] 高塚和夫、化学結合論入門ー量子論の基礎から学ぶ、東京大学出版会 (2007).

[21] H. Fujisaki, T. Miyadera, and A. Tanaka, Dynamical aspects of quantum entanglement for weakly coupled kicked tops, Phys. Rev. E. 67, 066201 (2003); H. Fujisaki, Entanglement induced by nonadiabatic chaos, Phys. Rev. A 70, 012313 (2004).

[22] 首藤啓、古典と量子の間〈量子力学 3〉 (岩波講座 物理の世界) (2011).

[23] Daniel M. Zuckerman, *Statistical Physics of Biomolecules: An Introduction*, CRC Press (2010).

[24] Rob Phillips, Jane Kondev, Julie Theriot, Hernan Garcia, *Physical*

Biology of the Cell, 2nd ed. Garland Science (2012); 翻訳本は、笹井理生, 伊藤一仁, 千見寺浄慈, 寺田智樹（共訳）, 細胞の物理生物学, 共立出版 (2011).

[25] 田崎晴明, 統計力学 1,2 (新物理学シリーズ), 培風館 (2008).

[26] 岡田泰伸 (監訳), ギャノング生理学 原書 23 版, 丸善 (2011).

[27] 佐久間康夫 (監訳), カラー図解 よくわかる生理学の基礎, メディカル・サイエンス・インターナショナル (2005).

[28] 甘利俊一, 情報理論, 筑摩書房 (2011).

[29] 伊庭幸人, ベイズ統計と統計物理, 岩波書店 (2003).

[30] Ken Dill and Sarina Bromberg, *Molecular Driving Forces: Statistical Thermodynamics in Biology, Chemistry, Physics, and Nanoscience* (2nd edition), Garland Science (2011).

[31] Charles Kittel, *Elementary Statistical Physics*, Dover Publications (2004).

[32] 大野克嗣, 非線形な世界, 東京大学出版会 (2009).

[33] 米沢富美子, ブラウン運動 (物理学 One Point 27), 共立出版 (1986).

[34] 田崎晴明, ブラウン運動と非平衡統計力学, アインシュタインと 21 世紀の物理学, 日本評論社 (2005).

[35] 大沢文夫, 大沢流手作り統計力学, 名古屋大学出版会 (2011).

[36] 深井有, 拡散現象の物理, 朝倉書店 (1988).

[37] K.R. Swanson, C. Bridge, J.D. Murray, and E.C. Alvord Jr, Virtual and real brain tumors: using mathematical modeling to quantify glioma growth and invasion, J. Neuro. Sci. **216** (2003) 1-10.

[38] J. C. Maxwell (1865), “A Theory of the Electromagnetic Field”, Phil.Trans.Roy.Soc.Lond. 155: 459-512, doi:10.1098/rstl.1865.0008

[39] Zur Elektrodynamik bewegter Körper, A. Einstein, Annalen der Physik (Germany), 17, 891-921 (1905).

[40] Geiger, Hans (1908). "On the Scattering of α-Particles by Matter". Proceedings of the Royal Society of London A 81 (546): 174-177.

Bibcode:1908RSPSA..81..174G. doi:10.1098/rspa.1908.0067

[41] Geiger, Hans; Marsden, Ernest (1909). "On a Diffuse Reflection of the α-Particles". Proceedings of the Royal Society of London A 82 (557): 495-500. Bibcode:1909RSPSA..82..495G. doi:10.1098/rspa.1909.0054

[42] Geiger, Hans (1910). "The Scattering of the α-Particles by Matter". Proceedings of the Royal Society of London A 83 (565): 492-504. Bibcode:1910RSPSA..83..492G. doi:10.1098/rspa.1910.0038

[43]

[44]

[45]

[46] Okada, T., Sugihara, M., Bondar, A. N., Elstner, M.,Entel, P., Buss, V., (2004). "The retinal conformation and its environment in rhodopsin in light of a new 2.2 A crystal structure". J.Mol.Biol. 342: 571-583.DOI: 10.1016/j.jmb.2004.07.044

[47] Kikuchi H. and Suzuki H.,(1997). " Dynamical Theory of Photoisomerization of the Rhodopsin Chromophore: Generation of a Transient Electric Field during Photoisomerization " . J. Phys. Chem. B 101: 6050-6056. DOI: 10.1021/jp962015i

[48] 広岡公夫：古代人と磁石の使用　「自然」中央公論社　１９７７．１　ｐ８８

[49] Aloysii Galvani (1791).De viribus electricitatis in motu musculari :Commentarius

[50] Volta, Alessandro (1800). " On the Electricity Excited by the Mere Contact of Conducting Substances of Different Kinds " . Philosophical Transactions of the Royal Society of London 90: 403-431. doi:10.1098/rstl.1800.0018

[51] Hans Christian Orsted (1997). Karen Jelved, Andrew D. Jackson, and Ole Knudsen, translators from Danish to English. Selected Sci-

entific Works of Hans Christian Orsted, ISBN 0-691-04334-5, pp.421-445

[52] 矢島祐利著「電磁気學史」岩波全書 (1850 年刊行)

[53] Y. Suganuma et al.,(2015). "Age of Matuyama-Brunhes boundary constrained by U-Pb zircon dating of a widespread tephra" . Geological Society of America; First published online April 2015, doi: 10.1130/G36625.1

[54] O. Kazaoka, et al., (2015). "Stratigraphy of the Kazusa Group, Boso Peninsula: An expanded and highly-resolved marine sedimentary record from the Lower and Middle Pleistocene of central Japan". Quaternary International 383: 116-135. doi:10.1016/j.quaint.2015.02.065