工学部のための力学入門 II

藤崎弘士[*1]

2019 年 12 月 17 日

*1 日本医科大学 医学部 物理学教室, fujisaki@nms.ac.jp

目次

第 1 章

トルクと角運動量

1.1　一体問題と多体問題

これまでは 1 つの質点の運動を扱ってきた。これを物理の用語では**一体問題 (one-body problem)** という。これは運動を考える上ではもっとも基本となり、かつもっとも簡単な場合である。しかし、現実には 1 つの質点が動くだけで話が済むわけではないのは明らかであり、2 つ以上の質点（粒子）が相互作用しているのが一般的である。N 個の粒子が相互作用して運動している問題は N 体問題、もしくは**多体問題 (many-body problem)** と呼ばれるが、一般にそれは非常に複雑な運動になる。そこで、本書では（また他の力学の教科書でも同様だが）2 体問題と、N 体問題の一般的な性質、それと N 個の質点の間の距離が固定されていると近似する、剛体の運動についてのみ説明しよう。

1.2　トルク（力のモーメント）

さて、2 個以上の質点がある場合、運動には 1 体問題にはない複雑さが加わる。それが**回転の運動**である。質点は点と考えられているので、回転させ

ても様子は変わらない[*1]。しかし、2 個の質点があれば、1 つの質点の周りに他の質点が回転しているという様子を思い浮かぶことができる。その典型的な例が太陽の周りを回る地球などの公転運動である。

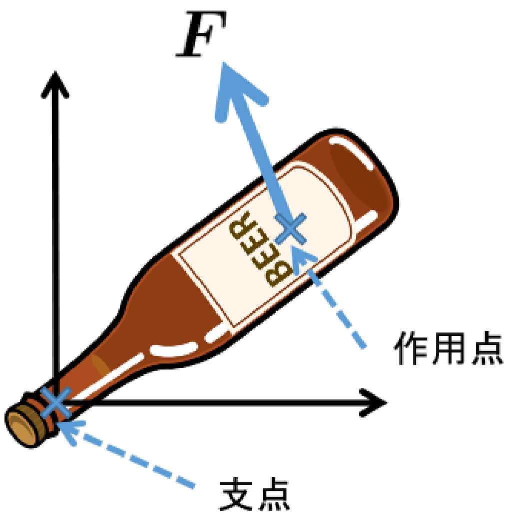

図 1.1　トルクの説明。

ここでは簡単のためにまず 2 次元上での回転について考える。そのとき**回転軸はある 1 つの方向を向いており、それが変化しない**とする。具体的には、ある平板状の硬い物体を考え、それに回転軸を取り付けて、回転させる場合を考える（図 1.1）。これを回転させるためには、この剛体の適当な部分に力を加える必要がある。ここで力を加える点のことを**作用点**と呼ぶ。回転軸を原点とし、力 (F_x, F_y) を作用点 P (x, y) に加えて、その結果この物

[*1] ただし、量子力学では質点にもスピンと呼ばれる回転の自由度を付与する場合がある。

体が $\Delta\theta$ 回転する状況を考えよう。その結果、P は Q まで移動するとする。その変位を極座標 $(x = r\cos\theta, y = r\sin\theta)$ を使って表すと、

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\Delta\theta\sin\theta \\ r\Delta\theta\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y\Delta\theta \\ x\Delta\theta \end{pmatrix} \tag{1.2.1}$$

となる[*2]。すると、この変化を引き起こすのに必要な微小な仕事は

$$\Delta W = F_x\Delta x + F_y\Delta y = (xF_y - yF_x)\Delta\theta \tag{1.2.2}$$

と計算できる。ここで出てきた括弧内の量が**トルク (torque)**[*3]であり、それを

$$N_z = xF_y - yF_x \tag{1.2.3}$$

と書くと $\Delta W = N_z\Delta\theta$ となる。1 次元の運動に対しては、仕事の微少変化は $\Delta W = F_x\Delta x$ と与えられるので、これと対応させると、N_z は回転を引き起こすのに必要な力のようなものと解釈できる。ここで z が添字としてついているが、いまは z 軸を回転軸とした回転を考えているので、これは回転軸の方向を表していると考えてよい。

1.3　角運動量

　また、簡単な計算から

$$\frac{d}{dt}(mxv_y - myv_x) = m(x\frac{dv_y}{dt} - y\frac{dv_x}{dt}) = N_z \tag{1.3.1}$$

となる。ここで出てきた

$$L_z = m(xv_y - yv_x) \tag{1.3.2}$$

は**角運動量 (angular momentum)**（の z 成分）と呼ばれる量であり、それは**回転の度合いを表す量**と考えることができる。これから

$$\frac{d}{dt}L_z = N_z \tag{1.3.3}$$

[*2] ここで回転によって r が変化しないと考えるのが本質的である。

[*3] 高校物理では**力のモーメント**と呼ばれていたが、以下ではトルクで統一する。

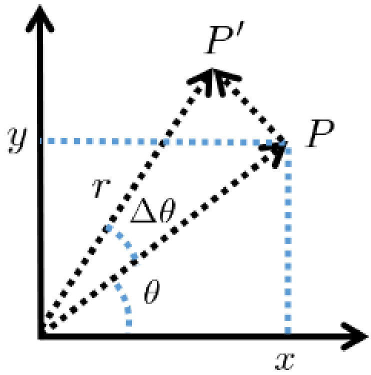

図 1.2　トルクを導出するための仮想的な回転。

という方程式が成り立っている。

ここで**運動量 (momentum)** を

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} \tag{1.3.4}$$

と定義すると、ニュートン方程式の z 成分は

$$\frac{d}{dt}p_z = F_z \tag{1.3.5}$$

となるが、式 (1.3.3) は形式的にはこの式と似ている。よって、力によって運動量が誘起されるように、トルクによって角運動量が誘起されると解釈することができる。

1.4　ベクトルの外積

式 (1.3.3) を 3 次元に一般化すると、

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{L} = \boldsymbol{N} \tag{1.4.1}$$

となり、これらのベクトルは実は以下のようにベクトルの**外積 (outer product)** を使って定義される。

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}, \tag{1.4.2}$$
$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \tag{1.4.3}$$

ここで馴染みのない読者のためにベクトルの外積について説明しておこう。例えば、3 次元のベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の外積は

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_y B_z - A_z B_y \\ A_z B_x - A_x B_z \\ A_y B_z - A_z B_y \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{1.4.4}$$

と定義される。

これは**たすき掛け**を使って「理解」すればよい。つまり、ベクトルに 2 行付け足して

$$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \\ A_x \\ A_y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \\ B_x \\ B_y \end{pmatrix} \tag{1.4.5}$$

として、最初の一行を消して、残りの行でたすき掛けをやっていけば所望の結果になる。

問い

上の外積の定義に基づいて、以下を示せ。また、3 つ目の式の θ はベクトル $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ のなす角である。

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C} \tag{1.4.6}$$

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) \tag{1.4.7}$$

$$|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\sin\theta \tag{1.4.8}$$

外積の定義から、式 (1.4.1) の z 成分が式 (1.3.3) になることは各自確かめよ。

1.5　力の釣り合い

ここで（高校物理の内容ではあるが）力の釣り合いについても触れておこう。トルクを導いたときのように、ここでも硬い物体（剛体）の力の釣り合いについて考える。具体的なものとして図*にあるようにブランコを考えよう。このブランコの両端に人が乗っており、それぞれの質量を m_A, m_B とする。すると、重力加速度は $\boldsymbol{g} = (0, 0, -g)$ なので[*4]、それぞれの力は $\boldsymbol{F}_A = m_A\boldsymbol{g}, \boldsymbol{F}_B = m_B\boldsymbol{g}$ となる。

さて、このブランコが釣り合うためにはどのような条件が成り立つ必要があるか。一つは力の釣り合いである。それはこのブランコにかかる「すべての力の和」がゼロでなければならないということを意味する。図*にあるように、作用点 A, B には $\boldsymbol{F}_A, \boldsymbol{F}_B$ という力がかかっているが、ブランコの支点において、これと釣り合う**抗力 (normal force)** という力が逆向きにかかっていると考える。それを $\boldsymbol{N}$ とすると、

$$\boldsymbol{N} + \boldsymbol{F}_A + \boldsymbol{F}_B = \boldsymbol{0} \tag{1.5.1}$$

が成り立つ必要がある。よって、抗力の大きさは $(m_A + m_B)g$ である。

[*4] あとで外積を計算するので、ここでは 3 次元空間で考える。

また、ブランコは支点を中心に回転するように作られている。その回転が起こらないようにするためには、次に「すべてのトルクの和」がゼロになっている必要がある。支点から A, B までのベクトルを $\boldsymbol{r}_A, \boldsymbol{r}_B$ とすると、それぞれのトルクは $\boldsymbol{r}_A \times \boldsymbol{F}_A, \boldsymbol{r}_B \times \boldsymbol{F}_B$ となる。よって、釣り合いの条件は

$$\boldsymbol{r}_A \times \boldsymbol{F}_A + \boldsymbol{r}_B \times \boldsymbol{F}_B = \boldsymbol{0} \tag{1.5.2}$$

となる。抗力のトルクは考えなくてもよいことに注意。

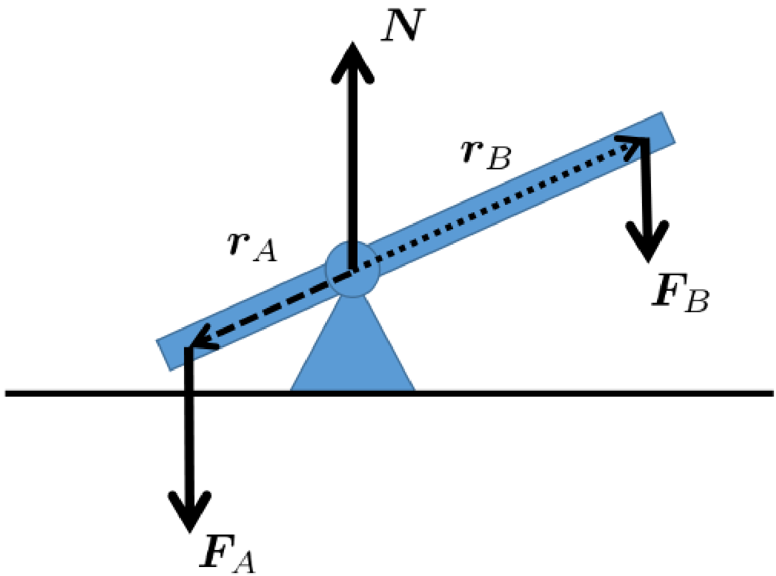

図 1.3　ブランコにおける力の釣り合いの説明。

第 2 章

2 体問題の解法

2.1　重心座標と運動量保存則

この節では 2 体問題の解き方について説明しよう。まず、2 体問題とは図 2.1 にあるように、2 つの質点が力を及ぼしあっている場合であり、ニュートン方程式を書くと

$$m_1 \frac{d^2 \boldsymbol{r}_1}{dt^2} = \boldsymbol{F}_{12}, \tag{2.1.1}$$

$$m_2 \frac{d^2 \boldsymbol{r}_2}{dt^2} = \boldsymbol{F}_{21}, \tag{2.1.2}$$

となる。ここで $\boldsymbol{F}_{12}$ は質点 2 から 1 への力と定義する。$\boldsymbol{F}_{12}$ も同様である。

ここで力が作用反作用の法則を満たす、つまり、

$$\boldsymbol{F}_{12} + \boldsymbol{F}_{21} = \boldsymbol{0} \tag{2.1.3}$$

であると仮定しよう。これは古典力学で現れる大部分の保存力で成り立つ。また、これは力が $\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ の方向に沿っているということも意味する。このような力を**中心力 (central force)** と呼ぶ。力にこの性質があると、実は 2 体問題を簡単化することができる。

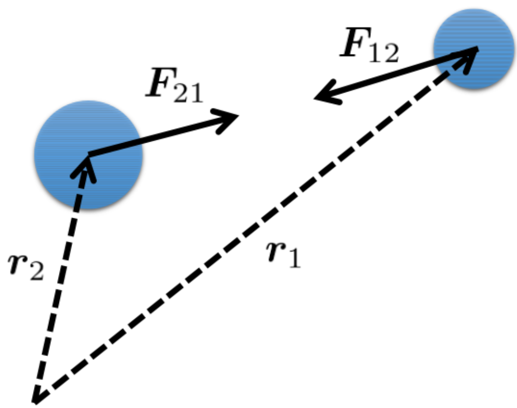

図 2.1　2 体問題の設定。

まず、式 (2.1.1) と (2.1.2) を足し合わせると、右辺はゼロになる。

$$m_1\frac{d^2\boldsymbol{r}_1}{dt^2}+m_2\frac{d^2\boldsymbol{r}_2}{dt^2}=\boldsymbol{F}_{12}+\boldsymbol{F}_{21}=\boldsymbol{0}, \tag{2.1.4}$$

このとき左辺を変形すると、

$$M\frac{d^2\boldsymbol{r}_\mathrm{G}}{dt^2}=\boldsymbol{0} \tag{2.1.5}$$

となるが、ここで $M=m_1+m_2$ は全質量であり、また**重心座標**を以下で定義した（図 2.2)。

$$\boldsymbol{r}_\mathrm{G}=\frac{m_1\boldsymbol{r}_1+m_2\boldsymbol{r}_2}{M} \tag{2.1.6}$$

問い

重心 $\boldsymbol{r}_\mathrm{G}$ から質点 1,2 へのベクトル $\boldsymbol{r}'_1, \boldsymbol{r}'_2$ を定義すると、$|\boldsymbol{r}'_1|:|\boldsymbol{r}'_2|=m_2:m_1$ となることを示せ。

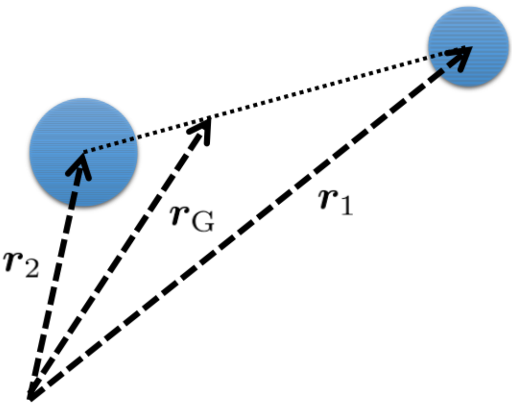

図 2.2　重心座標の定義。

さて、これから重要なことが分かる。中心力が働いている 2 体問題においては、重心座標は力がゼロのニュートン方程式に従っているので、**重心座標は等速直線運動をする（もしくは静止している）**ということである（力が一定の場合の運動について参照）。また、重心座標の一階微分から

$$\dot{\boldsymbol{r}}_\mathrm{G} = \frac{m_1\dot{\boldsymbol{r}}_1 + m_2\dot{\boldsymbol{r}}_2}{M} \tag{2.1.7}$$

となるが、これは以前に定義した運動量を使って

$$\dot{\boldsymbol{r}}_\mathrm{G} = \frac{\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2}{M} \tag{2.1.8}$$

と書き直せる。よって、式 (2.1.5) に入れると

$$M\frac{d^2\boldsymbol{r}_\mathrm{G}}{dt^2} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2) = \boldsymbol{0} \tag{2.1.9}$$

となる。これを一回積分すると、

$$\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{C} \tag{2.1.10}$$

となる。ここで $\boldsymbol{C}$ は定数のベクトルである。これは 2 体問題の場合の**運動量保存則 (conservation of momentum)** を表している。つまり、運動量の和は時間に依らないので、ある時刻 t_1 のときの運動量の和と別の時刻 t_2 のときの運動量の和は同じベクトルになる。

$$\boldsymbol{p}_1(t_1) + \boldsymbol{p}_2(t_1) = \boldsymbol{p}_1(t_2) + \boldsymbol{p}_2(t_2) \tag{2.1.11}$$

2.2　相対座標

重心座標にまつわることについて議論したが、これではまだ 2 体問題を解いたことにはならない。そのために、以下の相対座標を定義しよう。

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2 \tag{2.2.1}$$

重心座標と相対座標があれば、それから質点 1,2 のことが分かるので、あとは相対座標の性質がわかればよい。

問い

$\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$ を $\boldsymbol{r}_\mathrm{G}, \boldsymbol{r}$ を使って表せ。($\boldsymbol{r}_\mathrm{G}, \boldsymbol{r}$ の定義を使えばよい。)

相対座標の運動方程式を作るために、式 (2.1.1) と (2.1.2) をそれぞれ m_1, m_2 で割って、引き算すると

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \frac{\boldsymbol{F}_{12}}{m_1} - \frac{\boldsymbol{F}_{21}}{m_2} \tag{2.2.2}$$

となる。ここで作用反作用の法則を使うと、右辺は

$$\frac{\boldsymbol{F}_{12}}{m_1} - \frac{\boldsymbol{F}_{21}}{m_2} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\boldsymbol{F}_{12} = \frac{1}{\mu}\boldsymbol{F}_{12} \tag{2.2.3}$$

となる。ここで**換算質量 (reduced mass)** μ を以下で定義した。

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \tag{2.2.4}$$

すると、相対座標に関する運動方程式は

$$\mu \frac{d^2 \boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F}_{12} \tag{2.2.5}$$

となる。これは $\boldsymbol{F}_{12}$ が $\boldsymbol{r}$ のみの関数であれば、質量が μ と思ったときの一体問題と同じである。

2.3　中心力と角運動量保存則

中心力の場合は $\boldsymbol{F}_{12}$ は $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ に比例しているので、それを

$$\boldsymbol{F}_{12} = \boldsymbol{F} = f(r)\boldsymbol{r} \tag{2.3.1}$$

と書こう。通常の中心力では r の係数 f は r のみの関数である[*1]。また、簡単のために $\boldsymbol{F}_{12} = \boldsymbol{F}$ と置いた。

すると、相対座標の基準となる点、つまり、$\boldsymbol{r}_2$ の位置からのトルク $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ を計算するとゼロになる。

問い

このことを示せ。

よって、相対座標に関する角運動量の方程式は

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{L} = \boldsymbol{0} \tag{2.3.2}$$

となり、角運動量は時間とともに変化しない。これは**角運動量保存則 (conservation of angular momentum)** の例である。

角運動量は回転の大きさや向きを表しているので、これが一定ということは運動に大きな制約を課すことになる。実際、**角運動量が一定ならば、2 次元平面上の運動しかしない。**よって、中心力中の 2 体問題は、2 次元平面上を動く運動ということになる。つまり、もとは 3 次元で考えていたが、実は

[*1] 対称性からそう仮定するのが自然である。

２次元で考えればよいということであり、これは計算や考え方の簡略化につながるのである。

2.4　万有引力中の 2 体問題

2.4.1　１自由度の運動に還元する

さらに具体的に考えるために、**万有引力 (universal gravitation)** 中の 2 体問題を考えてみよう。万有引力とは質量をもったあらゆる物体間に働く力であり、2 つの質点 m_1, m_2 があり、その相対座標を $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ とすると、万有引力は

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\frac{Gm_1m_2}{r^3}\boldsymbol{r} \tag{2.4.1}$$

と書かれることが経験的に知られている。$\boldsymbol{r}$ に比例することから、この力は中心力である。G は**万有引力定数**と呼ばれ、宇宙のどこで測っても普遍の定数である[*2]。また、このベクトルの大きさは r^2 に反比例するので、これを**逆 2 乗の法則 (inverse square law)** ということもある。万有引力以外に、電荷の間に働く力も逆 2 乗の法則に従い、これを**クーロン力 (Coulomb force)** という。クーロン力に関しては、電磁気の授業で詳しく述べられる。

万有引力中の 2 体問題の典型例として、太陽と地球の運動を考えよう（図 2.3)。このとき $\boldsymbol{r}_1$ を地球の位置、m_1 を地球の質量、$\boldsymbol{r}_2$ を太陽の位置、m_2 を太陽の質量とすると、換算質量は $\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2} \simeq m_1$ となり、これはほぼ地球の質量と思ってよい[*3]。すると、相対座標に対する運動方程式は

$$m_1\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = -\frac{Gm_1m_2}{r^3}\boldsymbol{r} \tag{2.4.2}$$

となる。

[*2] $G \simeq 6.7 \times 10^{-11}\mathrm{m}^3\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{s}^{-2}$ である。

[*3] $m_1/m_2 \simeq 3.3 \times 10^5$ である

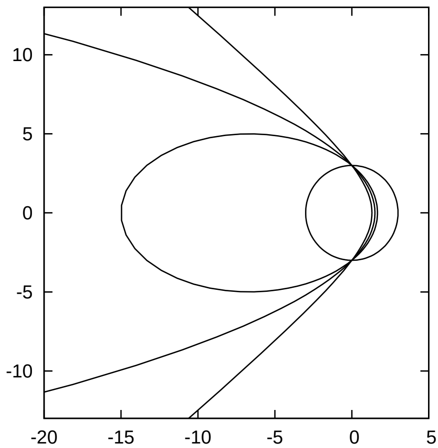

図 2.3　万有引力のニュートン方程式を解くことで得られる軌道。

ここで角運動量保存則から、この運動はある平面でしか起こらないので、それを xy 平面として、2 次元の極座標を導入しよう。すると、定義から $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r$ とかけるが、これの 1 階微分、2 階微分は既に計算してある（工学部のための力学入門 I の 1.3 節参照)。もう一度書くと

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{r} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta, \tag{2.4.3}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{r} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta \tag{2.4.4}$$

となる。ここで上のドットは時間微分を表す。

これから r 方向、θ 方向の運動方程式はそれぞれ

$$m_1(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}, \tag{2.4.5}$$

$$m_1(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0 \tag{2.4.6}$$

となる[*4]。この第 2 式は

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(m_1 r^2 \dot{\theta}) = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}L_z = 0 \tag{2.4.7}$$

と変形できて、これは角運動量保存則を表している。

問い

2 次元極座標を使うと、z 方向の角運動量が

$$L_z = m_1 r^2 \dot{\theta} \tag{2.4.8}$$

と書けることを示せ。

よって、一定の角運動量の値を L とすると、

$$\dot{\theta} = \frac{L}{m_1 r^2} \tag{2.4.9}$$

となるので、これを r 方向の式に入れると、

$$m_1\left(\ddot{r} - \frac{L^2}{m_1^2 r^3}\right) = -\frac{G m_1 m_2}{r^2}, \tag{2.4.10}$$

となる。ここで、左辺の括弧内の第二項を右辺にもっていくと、最終的に 1 自由度のニュートン方程式のように書ける。

$$m_1 \frac{d^2 r}{dt^2} = F(r) \tag{2.4.11}$$

$$F(r) = -\frac{G m_1 m_2}{r^2} + \frac{L^2}{m_1 r^3} \tag{2.4.12}$$

よって、**中心力中の 2 体問題は実質的に 1 自由度の問題に還元できた**ということである。つまり、r という 1 自由度に $F(r)$ という力が働いているニュートン方程式と同じになる。もとは 6 自由度[*5]あったわけだから、これは問題を大幅に簡略化しており、角運動量保存則がうまく使われている。

[*4] 相対座標の運動方程式に $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta$ をかけてみればよい。

[*5] 2 体問題は 2 個の質点の運動だから、もともとは 3 次元 ×2 で 6 自由度である。

2.4.2　運動の定性的な理解：有効位置エネルギー

では式 (2.4.11) について調べてみよう。これは r という 1 自由度に対するニュートン方程式とみなすことができ、右辺は r にかかる力だと考えることができる。そのときに、位置エネルギーは r に関する積分として計算できる[*6]が、積分するときの参照点を無限遠で考える。もし参照点を原点にしてしまうと力が発散してしまうからである。よって、位置エネルギーは

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} F(r')dr' = -\frac{Gm_1m_2}{r} + \frac{L^2}{2m_1r^2} \tag{2.4.13}$$

となる。$V(r)$ は r が感じている位置エネルギーであり、これを**有効位置エネルギー (effective potential energy)** とも言う。よって、運動方程式は

$$m_1\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{dV(r)}{dr} \tag{2.4.14}$$

となる。

すると 1 次元の系のときのエネルギー保存則の議論を使って、この系の全エネルギーは

$$E = \frac{1}{2}m_1\dot{r}^2 + V(r) \tag{2.4.15}$$

となり、これは保存する（エネルギー保存則)。運動エネルギーは常に正であるので、この保存則から

$$E > V(r) \tag{2.4.16}$$

でなければばならない。これはこの式を満たすような r だけが実際に実現するということを意味する。このような r の領域のことを**運動可能領域**と呼ぶ。

万有引力の問題の運動可能領域を調べるために、$V(r)$ の関数形を描くと図 2.4 のようになる。これは $-1/r$ という関数と $1/r^2$ という関数を足したものなので、図にあるように $r_{\min}$ で関数は最小になる。

[*6] この場合は 1 次元なので線積分でなく、単純な積分と考えてよい。

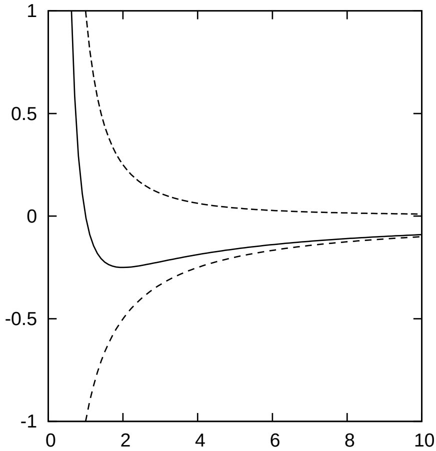

図 2.4　万有引力における有効ポテンシャル。

問い

最小になる点は $F(r_{\min}) = 0$ で与えられることを示せ。また、その点の位置を求めよ。

最小の点での有効位置エネルギーを $E_{\min} = V(r_{\min})$ とすると、$E < E_{\min}$ の場合は式 (2.4.16) から運動可能領域はない。$E = E_{\min}$ のときは、$\dot{r} = 0$ という解のみが許される。これは r 方向に動かないということを意味しているので、これは円運動の解を表す（図 2.3）。このときは $F(r_{\min}) = 0$ となっているので、これに角運動量の関係式 $L = m_1 r^2 \dot{\theta}$ と円運動のときの速度の式 $v = r\dot{\theta}$ を入れると、円運動の速度は

$$v_{\min} = \sqrt{\frac{Gm_2}{r_{\min}}} \tag{2.4.17}$$

となる。

問い

このことを示せ。

次に、$E_{\min} < E < 0$ のときは、運動可能領域は図 2.3 にあるように、$r_1 < r < r_2$ である。これは回転しながら r が変化するということを示しているが、実際、これは**楕円軌道**になっている。興味深いことは、一般の力であれば、回転する運動に対して軌道が閉じなくてもよいのだが（図＊）、万有引力の場合はそれが閉じる軌道になることである。これはこの問題をより厳密に調べると分かるが、本書では扱わない。

最後に $E \geq 0$ のときは、運動可能領域は $r > r_3$ になるが、この軌道は実は**双曲線運動**（$E = 0$ のときは放物線運動）になる（図 2.3)。この場合の軌道は、太陽系外に飛ばす人工衛星の軌道などを表している。m_1 が動いているとして、m_2 との間の距離が r_3 までは接近できるが、その後は飛び出してしまい、２度と帰ってくることはない。例えば、地球から人工衛星を飛ばして、太陽系外に送ることを考えよう。そのときは、初速度 v_0 はどれくらいでないといけないか？　この場合は３次元の通常のエネルギー保存則

$$E = \frac{1}{2} m_1 \boldsymbol{v}^2 - \frac{G m_1 m_2}{r} \tag{2.4.18}$$

を使おう。地球の半径を R とすると、

$$\frac{1}{2} m_1 v_0^2 - \frac{G m_1 m_2}{R} = 0 - 0 \tag{2.4.19}$$

という関係が成り立たないといけないので、最小の初速度の値は

$$v_0 = \sqrt{\frac{2 G m_2}{R}} \tag{2.4.20}$$

となる。これを**第 2 宇宙速度**と言う。式 (2.4.17) で $r_{\min} = R$ としたものは**第 1 宇宙速度**と呼ばれる。

問い

式 (2.4.15) を使って、第 2 宇宙速度を出してみよ。単純にやるとうまくいかない。それはなぜか。

第 3 章

質点系 (N 体系) の運動

これまでは高々 2 体問題までを扱ってきたが、以下の節では**質点系 (system of particles) の運動**、すなわち N 個の質点がある場合を取り扱う。N としてはどんな大きさの数をもってきてもよい[*1]。もちろん、この問題を解析的、数値的に厳密に扱うのは大変なので、まずは基本的な性質を以下で調べよう。それは 2 体問題でも既に出てきた、**重心運動**と**相対運動**であり、後者から剛体の回転の運動方程式が導かれる。

[*1] $N=$ 無限大でもよい。ただし、その場合は系の密度が有限になるように考える。以下の剛体の節参照。

3.1　運動量保存則

N 体系のニュートン方程式を書き下すと

$$m_1 \frac{d^2\boldsymbol{r}_1}{dt^2} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_{12} + \boldsymbol{F}_{13} + \cdots + \boldsymbol{F}_{1N} \tag{3.1.1}$$

$$m_2 \frac{d^2\boldsymbol{r}_2}{dt^2} = \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_{21} + \boldsymbol{F}_{23} + \cdots + \boldsymbol{F}_{2N} \tag{3.1.2}$$

$$\vdots$$

$$m_N \frac{d^2\boldsymbol{r}_N}{dt^2} = \boldsymbol{F}_N + \boldsymbol{F}_{N1} + \cdots + \boldsymbol{F}_{N,N-1} \tag{3.1.3}$$

となる（図 3.1)。ここで右辺の第 1 項は**外力 (external force)** と呼ばれる力であり、いま考えている質点系以外のところから作用する力である。例えば、地上の運動であれば、重力を考えればよい。それ以外の力は**内力 (internal force)** と呼ばれており、これは質点系の粒子間で働く力である。$\boldsymbol{F}_{ij}$ は j が i に及ぼす力という意味であり、これは 2 体問題のときと同じである。上のように書くのは面倒なので、これを 1 つの式にまとめると

$$m_i \frac{d^2\boldsymbol{r}_i}{dt^2} = \boldsymbol{F}_i + \sum_{j \neq i} \boldsymbol{F}_{ij} \tag{3.1.4}$$

となる。さて、この式の両辺で i についての和をとると、

$$\sum_i m_i \frac{d^2\boldsymbol{r}_i}{dt^2} = \sum_i \boldsymbol{F}_i + \sum_i \sum_{j \neq i} \boldsymbol{F}_{ij} \tag{3.1.5}$$

となるが、ここで右辺第 2 項は作用反作用の法則 $\boldsymbol{F}_{ij} = -\boldsymbol{F}_{ji}$ により消えてしまう。よって、外力の和を $\boldsymbol{F}^{\mathrm{ex}}$ と書くと、この式は

$$M \frac{d^2\boldsymbol{r}_{\mathrm{G}}}{dt^2} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{ex}} \tag{3.1.6}$$

と書ける。ここで $M = \sum_i m_i$ は質点系の全質量、$\boldsymbol{r}_{\mathrm{G}}$ は以下で定義される質点系の重心

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{G}} \equiv \frac{1}{M} \sum_i m_i \boldsymbol{r}_i \tag{3.1.7}$$

である。ここで重要なことが分かる：**質点系の重心は、外力のみが作用しているニュートン方程式で記述できる**ということである。もとの運動は $3N$ 個の自由度を考えなければならなかったから、これはある種の簡略化になっている。

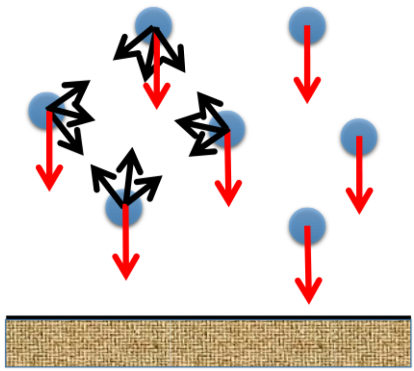

図 3.1　質点系の運動のための設定。

また、もし**外力がない場合は重心は等速運動（静止を含む）する**ことになる。これは重心の定義に戻ると、

$$\frac{d\boldsymbol{r}_{\mathrm{G}}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i \boldsymbol{p}_i \tag{3.1.8}$$

が保存するということであり、これは（2 体問題のときと同じで）**運動量保存則**を表している。

3.2　角運動量保存則

質点系の運動方程式の両辺に左から $\boldsymbol{r}_i$ を外積としてかけ、左辺を適当に変形すると、以下の角運動量の方程式を導くことができる。

$$\frac{d\boldsymbol{L}_1}{dt} = \boldsymbol{N}_1 + \boldsymbol{N}_{12} + \boldsymbol{N}_{13} + \cdots + \boldsymbol{N}_{1N} \tag{3.2.1}$$

$$\frac{d\boldsymbol{L}_2}{dt} = \boldsymbol{N}_2 + \boldsymbol{N}_{21} + \boldsymbol{N}_{23} + \cdots + \boldsymbol{N}_{2N} \tag{3.2.2}$$

$$\vdots$$

$$\frac{d\boldsymbol{L}_N}{dt} = \boldsymbol{N}_N + \boldsymbol{N}_{N1} + \cdots + \boldsymbol{N}_{N,N-1} \tag{3.2.3}$$

となる。ここで

$$\boldsymbol{L}_i = \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i, \tag{3.2.4}$$

$$\boldsymbol{N}_i = \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i, \tag{3.2.5}$$

$$\boldsymbol{N}_{ij} = \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_{ij}, \tag{3.2.6}$$

である。これを 1 つの式で書くと

$$\frac{d\boldsymbol{L}_i}{dt} = \boldsymbol{N}_i + \sum_{j\neq i} \boldsymbol{N}_{ij} \tag{3.2.7}$$

となる。

問い

式 (3.2.7) を導け。

この両辺を i について和をとると、

$$\sum_i \frac{d\boldsymbol{L}_i}{dt} = \sum_i \boldsymbol{N}_i + \sum_i \sum_{j\neq i} \boldsymbol{N}_{ij} \tag{3.2.8}$$

となるが、このとき**力が中心力であれば**右辺第 2 項はやはり 0 になる。

問い

式 (3.2.8) の右辺第 2 項が 0 になることを示せ。

外力によるトルクの和を $\boldsymbol{N}^{\mathrm{ex}}$ と書き、全角運動量を $\boldsymbol{L}=\sum_i \boldsymbol{L}_i$ と定義すると、

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}=\boldsymbol{N}^{\mathrm{ex}} \tag{3.2.9}$$

という方程式が得られる。これは (3.1.6) に対応する方程式であり、**外力がかからない、もしくは外力によるトルクが $\mathbf{0}$ のときには、$\boldsymbol{L}$ は保存する、つまり、角運動量は保存する**ということである。

3.3　質点系の相対座標の運動

2 体問題では重心座標と相対座標の運動を考えた。それと同様のことを質点系でもしておこう。ただし、2 体問題の場合は相対座標は一方の粒子から他方の粒子の差ベクトルとして定義されたが、N 個の粒子がある場合は、重心座標を参照して相対座標を定義しよう。つまり、

$$\boldsymbol{r}_i'=\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_{\mathrm{G}} \tag{3.3.1}$$

と定義する。

まず、全角運動量を上の定義を使って書き直すと、

$$\boldsymbol{L}=\sum_i \boldsymbol{L}_i=\sum_i m_i(\boldsymbol{r}_{\mathrm{G}}+\boldsymbol{r}_i')\times(\dot{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{G}}+\dot{\boldsymbol{r}}_i') \tag{3.3.2}$$

となるが、

$$\sum_i m_i\boldsymbol{r}_i'=\mathbf{0} \tag{3.3.3}$$

となることから、

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}_{\mathrm{G}}+\boldsymbol{L}^{\mathrm{in}} \tag{3.3.4}$$

$$\boldsymbol{L}_{\mathrm{G}}=M\boldsymbol{r}_{\mathrm{G}}\times\dot{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{G}} \tag{3.3.5}$$

$$\boldsymbol{L}^{\mathrm{in}}=\sum_i m_i\boldsymbol{r}_i'\times\dot{\boldsymbol{r}}_i' \tag{3.3.6}$$

と分解できる。

問い

式 (3.3.3) を導け。

一方、トルクのほうは

$$\boldsymbol{N}^{\mathrm{ex}} = \boldsymbol{N}_{\mathrm{G}} + \boldsymbol{N}^{\mathrm{in}} \tag{3.3.7}$$

$$\boldsymbol{N}_{G} = \boldsymbol{r}_{\mathrm{G}} \times \boldsymbol{F}^{\mathrm{ex}} \tag{3.3.8}$$

$$\boldsymbol{N}^{\mathrm{in}} = \sum_{i} \boldsymbol{r}_i' \times \boldsymbol{F}_i \tag{3.3.9}$$

と分解できるので、これから

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{L}_{\mathrm{G}} + \boldsymbol{L}^{\mathrm{in}}) = (\boldsymbol{N}_{\mathrm{G}} + \boldsymbol{N}^{\mathrm{in}}) \tag{3.3.10}$$

という式が成り立つ。

また、重心の角運動量を時間微分すると、

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{L}_{\mathrm{G}} = M\boldsymbol{r}_{\mathrm{G}} \times \ddot{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{G}} = \boldsymbol{N}_{\mathrm{G}} \tag{3.3.11}$$

という式が出てくるので、上の式からこの式を引くと、

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{L}^{\mathrm{in}} = \boldsymbol{N}^{\mathrm{in}} \tag{3.3.12}$$

という式が得られる。これが相対座標に対する角運動量の式である。

第4章

剛体の運動

質点系の運動の応用例として、**剛体 (rigid body)** の運動を考えよう。剛体とは質点間の距離が不変の物体として定義される。つまり、$|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|$ が時間とともに変化しないということである。もちろんこれはある種の理想化であるが、現実にある「硬いもの」を考えれば近似的に成り立つのは納得できるだろう[*1]。

さて、以下では簡単のために **2 次元上での剛体運動**のみに議論を制限する。これは 3 次元の運動をいきなり議論するのが難しいためである[*2]。2 次元の運動において、重要な剛体の回転運動が現れるので、その基本的な性質をまず調べる（理解する）必要がある。

4.1 剛体の回転の方程式

図*****のような 2 次元平面に張り付いた剛体を考えよう。それが並進運動をする空間を XY 平面とすると、回転軸は Z 軸となる。よって、**角運動量やトルクが z 成分のみをもつ場合を考えればよい。**並進運動は 2 次元だから、

[*1] こんにゃくや水などはもちろんダメである。

[*2] 代表的な 3 次元の剛体の運動はコマの運動である。最近、コマの新しい運動が発見されたことからも分かるように、3 次元の運動は研究レベルでも難しい。

ここでは 3 自由度の運動を考えればよいということになる[*3]。3 次元の運動の場合は、3 次元の重心座標の運動と、3 次元の角運動量の運動で、6 自由度の運動を考えなければならないことに比べると、簡単化していることが分かるだろう。

さて、2 次元極座標を使うと、$L_z = mr^2\dot{\theta}$ と書けることは (2.4.8) で述べられている。これを使うと、角運動量の方程式は (3.2.9) より

$$\frac{d}{dt}\sum_i m_i r_i^2 \dot{\theta} = N_z^{\mathrm{ex}} \tag{4.1.1}$$

となる。ここで、**剛体を仮定しているので、すべての質点が同じ角速度 $\dot{\theta}$ で回転するとしている**[*4]。また、m_i, r_i が時間とともに変化しないものとすると[*5]、この式は

$$I\frac{d\omega}{dt} = N_z^{\mathrm{ex}} \tag{4.1.2}$$

となる。ここで**慣性モーメント (moment of inertia)**

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \tag{4.1.3}$$

を定義し、角速度を $\omega = \dot{\theta}$ を使って表した。これは角度に対する式になっており、剛体の**回転 (rotation)** を記述しているので、これを**回転の式**と呼んでもよいだろう。

これを重心の式 (3.1.6) と比べるとその相似性は明らかである。式 (3.1.6) を速度を使って書くと、

$$M\frac{d\boldsymbol{v}_{\mathrm{G}}}{dt} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{ex}} \tag{4.1.4}$$

となるので、慣性モーメントは質量に対応することが分かる。よって、**慣性モーメントとは回転のしにくさを表す量**だと言っていいだろう。つまり、I が大きい剛体は回転しにくく、I が小さい剛体は回転しやすい。

[*3] ただし、以下で調べるように、簡単な場合はこの 3 自由度の運動が 1 自由度の運動に落ちる。

[*4] つまり、$\dot{\theta}_i = \dot{\theta}$ と置いた。

[*5] これも剛体の性質である。

4.2　慣性モーメントの計算

上で出てきた慣性モーメントは質量と同じようなものなので、「与えられたもの」と考えることもできる。しかし、簡単な形状の剛体であれば具体的に計算できるので、いくつか例を挙げておこう。ただし、重要なことは、剛体の質量を M、そのだいたいの大きさを L としたときに、慣性モーメントはだいたい ML^2 の大きさになるということである。これは次元からも明らかであるし、ML^2 にかかる係数を具体的に知りたいときに以下のような計算を行うということである。

4.2.1　2原子分子の慣性モーメント

もっとも簡単な場合が2原子分子の場合である。図 4.1 にあるように、この場合はいくつか軸の取り方がある。2原子を貫く方向に対しては「幅」がないので慣性モーメントはゼロである。そこで、2原子分子を2次元平面上に置いたときの回転に関わる慣性モーメントについて考えよう。図＊のように、2原子の質量を m_1, m_2 とし、その間の距離を L とする。また、軸を m_1 から x だけ離れたところにおくと、定義から慣性モーメントは

$$I = m_1 x^2 + m_2 (L - x)^2 \tag{4.2.1}$$

となる。これを x の関数として考えると下に凸の放物線であり、

$$x = \frac{m_2 L}{m_1 + m_2} \tag{4.2.2}$$

のときに最小になる。これは実は 2 体問題の重心座標そのものになっている。

問い

このことを確かめよ。

つまり、重心を軸に回転させると、慣性モーメントは最小になる（回りやす

い）ということである。これは感覚的にも正しいことが分かるだろう。

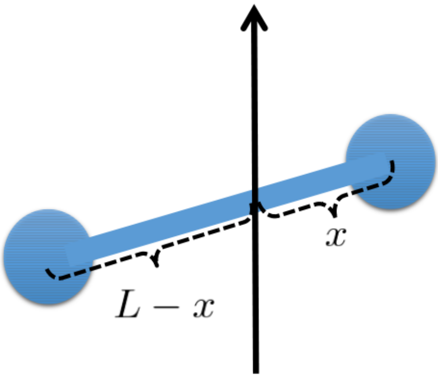

図 4.1　2 原子分子の慣性モーメント。

4.2.2　棒の慣性モーメント

図 4.2 のような細長い棒の慣性モーメントを求めることを考えよう。具体的には鉛筆を回すことなどを考えればよい。2 原子分子のときと同様に、重心の回りの慣性モーメントが最小なので、それを求めよう。この棒の長さを L とする。

ただし、このときは剛体を連続体として考える。つまり、一様な密度 ρ [Kg/m] をもっており、質量 M は $M = \int_{-L/2}^{L/2} \rho dx = \rho L$ と計算される。連続体の諸量を計算する際の常套手段は、細かい部分に分けて、それを足し合わせ、最後に極限をとるということである[*6]。図∗にあるように、x から $x + \Delta x$ までの微小な部分を考えると、ここの部分の質量は $\rho \Delta x$ であり、軸から x だけ離れているので、慣性モーメントへの寄与は $\rho(\Delta x)x^2$ となる。

[*6] これはリーマン積分の考え方である。

これを足し合わせて $\Delta x \to 0$ の極限をとると、それは以下の積分になる。

$$I = \int_{-L/2}^{L/2} \rho x^2 dx = \frac{1}{12}\rho L^3 = \frac{1}{12}ML^2 \tag{4.2.3}$$

ここで $M = \rho L$ を使った。ここで、本質的なのは 1/12 という係数である。

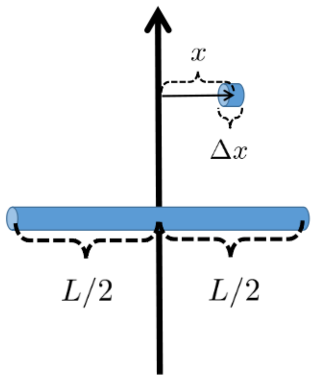

図 4.2　細い棒の慣性モーメント。

4.2.3　円形の慣性モーメント

次に 2 次元の均一な円形の剛体の回転を考えよう（図 4.3)。その半径を R とする。具体的には CD（コンパクトディスク）などを回すことを考えればよい。回転軸を重心（中心）にすると、対称性から極座標を使うのが便利である。このときの小さい領域は図＊にある扇型であり、その範囲は r から $r + \Delta r$ と θ から $\theta + \Delta\theta$ で囲まれる部分である。この部分の面積は $r\Delta r\Delta\theta$ であるので、面密度を ρ [Kg/m^2] とすると、質量は $\rho r\Delta r\Delta\theta$ となる。軸からの距離は r であるので、慣性モーメントへの寄与は $(\rho r\Delta r\Delta\theta)r^2$ である。

$\Delta r, \Delta\theta \to 0$ という極限を考えると、慣性モーメントは

$$I = \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\theta \rho r^3 = \frac{1}{2}\rho\pi R^4 = \frac{1}{2}MR^2 \tag{4.2.4}$$

となる。ここで $M = \rho(\pi R^2)$ を使った。

この円形を Z 軸方向に伸ばすと円柱となる。高さ L、質量 M で半径が R の円柱に対して、重心を貫く Z 方向の慣性モーメントを計算すると、一見不思議だが、上と同じ $\frac{1}{2}MR^2$ になる。

問い

このことを確かめよ。

この慣性モーメントは液体が詰まった缶の回転などを考えるときに必要となる。

4.2.4　球の慣性モーメント

最後に、回転というときにイメージしやすい、球について考えよう。この場合も重心を貫く慣性モーメントについて考える。ただし、ここでは **3 次元の極座標**を考えねばならない。これは 2 次元の極座標の自然な拡張として考えることができる。図 * にあるように、この場合の微小な体積は $r^2\Delta r \sin\theta\Delta\theta\Delta\phi$ であり、軸からの距離は $r\sin\theta$ であるから、一様な密度を ρ [Kg/m^3] とすると、微小な部分の慣性モーメントは

$$\Delta I \simeq \rho r^2 \Delta r \sin\theta \Delta\theta \Delta\phi (r\sin\theta)^2 \tag{4.2.5}$$

となる。これを積分すると、

$$I = \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\phi \rho r^4 \sin^3\theta = \frac{2}{5}MR^2 \tag{4.2.6}$$

となる。ここで、$M = \rho\frac{4}{3}\pi R^2$ である。

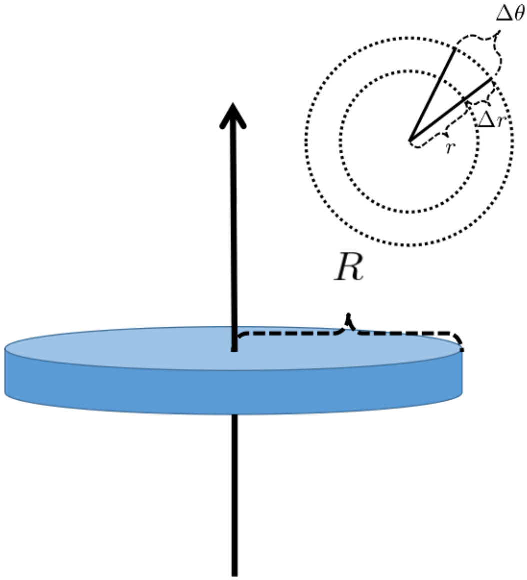

図 4.3　薄い円盤の慣性モーメント。

問い

このことを確かめよ。

4.3　剛体の運動の例

4.3.1　剛体振り子

それでは具体的な剛体の運動についていくつか考えよう。まず最初に**剛体振り子**の問題について考える。これは剛体のある点を支点として固定し、その周りに（微小に）振動させるような運動であり、いまではほとんど見かけないが、振り子時計の運動を記述するものである（図 4.5)。この問題では回

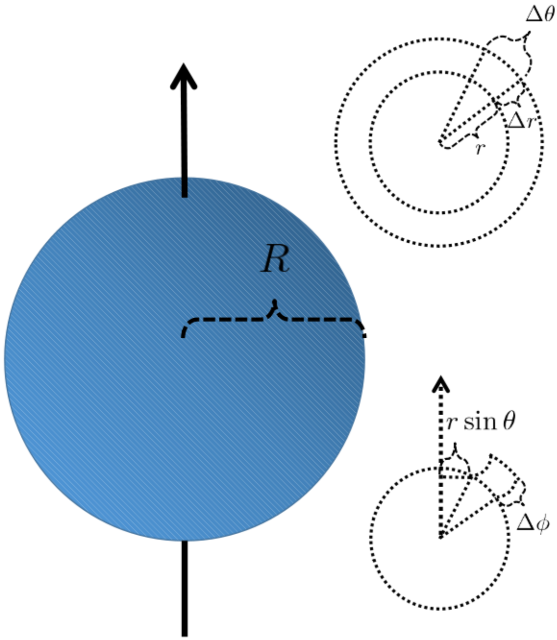

図 4.4　球の慣性モーメント。

転運動のみを考えればよいので、剛体の運動としてはもっとも簡単な場合である。

図 4.5 のように、座標をとり、支点を原点とし、剛体の重心座標を $(x_{\rm G}, y_{\rm G})$ とする。まず、質点系と思ってトルクを計算すると、このときに各質点に働く外力は重力のみなので、

$$N^{\rm ex} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{g} = \boldsymbol{r}_{\rm G} \times M\boldsymbol{g} \tag{4.3.1}$$

となる。

問い

このことを確かめよ。

これを成分に分けて計算すると、$N_z = -Mgx_{\mathrm{G}}$ となるので、これを回転の式 (4.1.2) に入れると、

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -Mgx_{\mathrm{G}} \tag{4.3.2}$$

が得られる。支点から重心までの長さを l とし、回転角を θ とすると、$x_{\mathrm{G}} = l\sin\theta$ と表すことができるので、最終的に

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -Mgl\sin\theta \tag{4.3.3}$$

が得られる。これが剛体振り子の式である。

ただし、このままでは簡単には解けないので、ここで振り子の振れ幅が微小である、つまり、θ が十分小さいと仮定する。そのときは、テイラー展開から $\sin\theta \simeq \theta$ となるので、式 (4.3.3) は

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -Mgl\theta \tag{4.3.4}$$

となる。これは $I \leftrightarrow m, Mgl \leftrightarrow k$ と置き換えることで、質量 m、バネ係数 k のバネの運動と同じ式になる。よって、既に解けており、振動数が $\omega = \sqrt{\frac{Mgl}{I}}$ の正弦（サイン）関数が解となる。

4.3.2　ヨーヨーの運動

次にヨーヨーの運動について考える（図 4.6）。先の剛体振り子の場合と異なり、この場合は重心運動と回転運動を両方考えねばならない。

図 4.6 のように、ヨーヨーには中に軸があり、その半径を r とし、反時計回りの回転角を θ とする。この系にはまず重力が働くので、y 方向に $-Mg$ という力がかかっている。前の議論から、これは重心にかかっていると考えてよい。また、ヨーヨーには糸がついているので、それによって引っ張られ

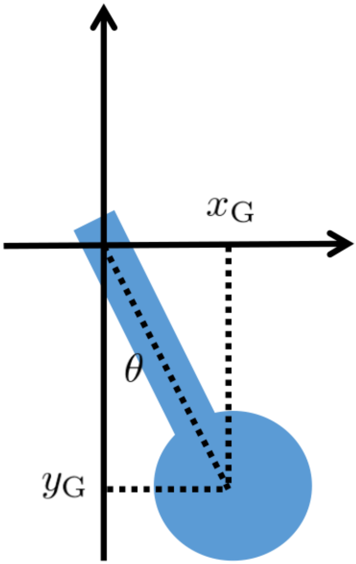

図 4.5　剛体振り子の運動。

る力がある。これは糸の張力であり、それを T とおこう。これは y 方向の正の向きの力である。よって、重心の運動方程式は

$$M\frac{d^2y}{dt^2} = T - Mg \tag{4.3.5}$$

となる。

また、この張力によって、ヨーヨーの回転が生み出される。(重心から働く重力は今の場合トルクには寄与しない。) それは重心の周りのトルクを計算してみればわかる。$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ を計算してみると、$\boldsymbol{r} = (r, 0, 0), \boldsymbol{F} = (0, T, 0)$

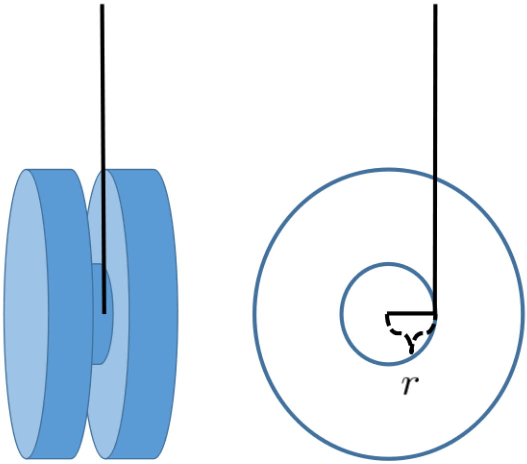

図 4.6　ヨーヨーの運動。

なので、$N_z = rT$ となる。よって、回転の方程式は

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = rT \tag{4.3.6}$$

となる。

　しかし、この 2 つの式だけではこの運動は解けない。というのも、未知数が y, θ, T の 3 つなのに対して 2 つの式しかないからである。ここでもう 1 つの条件として、糸が滑らないとする。すると、重心の微小な変化 Δy とヨーヨーの微小な回転 $\Delta\theta$ の間に

$$\Delta y = -r\Delta\theta \tag{4.3.7}$$

という関係が成り立たねばならない。

問い

このことを確かめよ。

以上の 3 つの式から y, θ, T を求めることができる。

この滑らない条件を回転の式に入れて T について解くと、

$$T = \frac{I}{r}\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{I}{r^2}\frac{d^2y}{dt^2} \tag{4.3.8}$$

となる。これを重心の式に入れると、

$$M\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{I}{r^2}\frac{d^2y}{dt^2} - Mg \tag{4.3.9}$$

が得られる。よって、y 方向の加速度は定数であり、

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g\left(\frac{Mr^2}{Mr^2+I}\right) \tag{4.3.10}$$

と求める。つまり、この運動は等加速度運動であるが、通常の重力 g の場合から括弧内の因子（1 より小さい）だけ小さくなっている。物理的には、これは糸の張力のせいで上向きに引っ張られているので、その分、重力加速度が目減りしたと考えることができる。

問い

張力 T の具体的な表式を求めよ。

4.3.3　斜面を転がる剛体の運動

最後の例として、図 4.7 にあるような、斜面を転げ落ちる剛体について考えよう。すぐ後で分かるように、これは実質的にヨーヨーの運動と同じである。

剛体は半径 R の円柱か球とし、その慣性モーメントを I、斜面の角度は α とする。ただし、**剛体と斜面の間には摩擦が働く**とする。もし摩擦がなければ、剛体はただ滑っていくだけので、その場合は斜面を移動する質点の運動と同じになる。

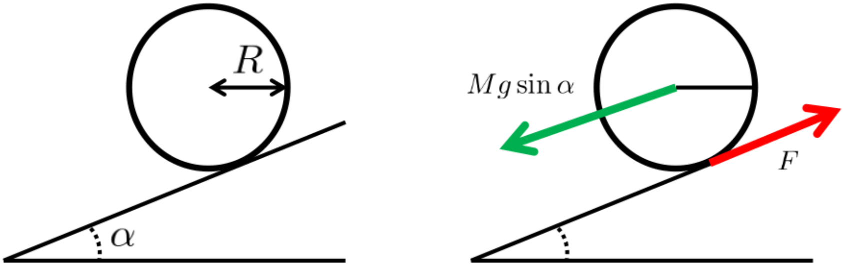

図 4.7　斜面を転げ落ちる剛体。

ここで斜面に平行に x 軸をとると、重心の運動方程式は

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = Mg\sin\alpha - F \tag{4.3.11}$$

となる。ここで F は摩擦力であり、$Mg\sin\alpha$ は重力の斜面方向である。

一方、回転の運動方程式は

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = RF \tag{4.3.12}$$

となる。右辺のトルクの計算するためには、斜面が鉛直になるように傾けた座標で考えてみればよい。

ただし、ヨーヨーの場合と同じで、このままでは未知数が x, θ, F と 3 つあり、式が 2 つしかないので解けない。そこで摩擦力にさらなる要請を課すことにする。それは「剛体が斜面上を**滑らない**で転がる」ということであり、これは静止摩擦を考えていることに相当する。

滑らないということから、

$$\Delta x = R\Delta\theta \tag{4.3.13}$$

という関係があるので、これを時間で 2 階微分して

$$\ddot{x} = R\ddot{\theta} \tag{4.3.14}$$

となる。これら 3 つの式を連立させると、x 方向の加速度は

$$\ddot{x} = \left(\frac{MR^2}{I + MR^2}\right) g \sin\alpha \tag{4.3.15}$$

と求まる。これから斜面向きの加速度は、質点だと思ったときの加速度 $g\sin\alpha$ に括弧内の因子をかけたものになることが分かる。これはヨーヨーのときと全く同じである。以上のことから、$r \leftrightarrow R, Mg \leftrightarrow Mg\sin\alpha, T \leftrightarrow F$ と置き換えることで、ヨーヨーと斜面の剛体の運動は全く等価になることが分かる。

4.4　剛体運動とエネルギー保存則

さて、剛体の議論の最後に、剛体のエネルギー保存則について触れる。そのために、ヨーヨーを例にして考えよう。1 次元の運動の場合と同様に、式 (4.3.9) の両辺に $\dot{y}$ をかけて時間について積分すると、

$$\frac{1}{2}M\dot{y}^2 = -\frac{I}{2r^2}\dot{y}^2 - Mgy + C \tag{4.4.1}$$

となる。

問い

このことを確かめよ。

回転との関連を分かりやすくするために、$\dot{y} = -r\dot{\theta}$ を代入すると、上の式は

$$\frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + Mgy = C \tag{4.4.2}$$

となる。この左辺が一定であり、これが剛体の運動のエネルギー保存則を表す。左辺の第 1 項は通常の運動エネルギーであり、第 3 項は位置エネルギー

である。そして、第 2 項が剛体の回転に関わるエネルギーであり、これを回転のエネルギーと呼んでもいいだろう。

問い

ヨーヨーが最初に静止しており、それが L だけ下に落ちたときの速度を求めよ。上のエネルギー保存則を使ってみよ。

回転のエネルギーを一般的に導出するためには、再び質点系に戻ればよい。2 次元の回転のみを考え、その軸を z 軸とする。質点の座標を $r_i \sin\theta_i, r_i \cos\theta_i$ とすると、質点の速度の大きさの 2 乗は

$$v_i^2 = r_i^2 \dot{\theta}_i^2 = r_i^2 \dot{\theta}^2 \tag{4.4.3}$$

となる。剛体なので $\dot{\theta}_i = \dot{\theta} =$ 一定となることを使った。

問い

このことを確かめよ。

よって、質点系の運動エネルギーは

$$\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i r_i^2 \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 \tag{4.4.4}$$

となる。これは先に出たヨーヨーの回転のエネルギーと同じ形であることが分かるだろう。